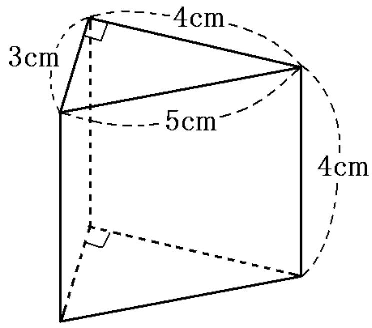
【】立体の表面積

【】角柱・角錐の表面積

[問題](3 学期)

次の図の三角柱の底面積，側面積，表面積を求めよ。



[解答欄]

底面積：	側面積：	表面積：

[ヒント]

底面：底辺 4cm 高さ 3cm の三角形(または，底辺 3cm 高さ 4cm の三角形)

側面：3 つの長方形(正方形)(縦 4cm 横 5cm，縦 4cm 横 4cm，縦 4cm 横 3cm)

(表面積)＝(底面積)×2＋(側面積)

[解答]底面積：6 cm^2　側面積：48 cm^2　表面積：60 cm^2

[解説]

(底面積)＝$\dfrac{1}{2}$×4×3＝6(cm^2)

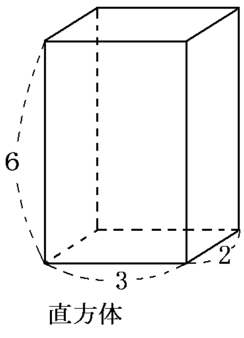
(側面積)＝4×5＋4×4＋4×3＝48(cm^2)

(表面積)＝(底面積)×2＋(側面積)＝6×2＋48＝60(cm^2)

[問題](3 学期)

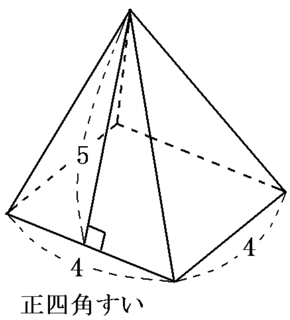
次の立体の表面積をそれぞれ求めよ。ただし，単位は cm とする。

(1)



直方体

(2)



正四角すい

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(2)底面：1 辺が 4cm の正方形

側面：底辺 4cm 高さ 5cm の三角形

[解答](1) 72cm^2　(2) 56 cm^2

[解説]

(1) (底面積)＝3×2＝6(cm^2)，(側面積)＝6×3＋6×2＋6×3＋6×2＝60(cm^2)

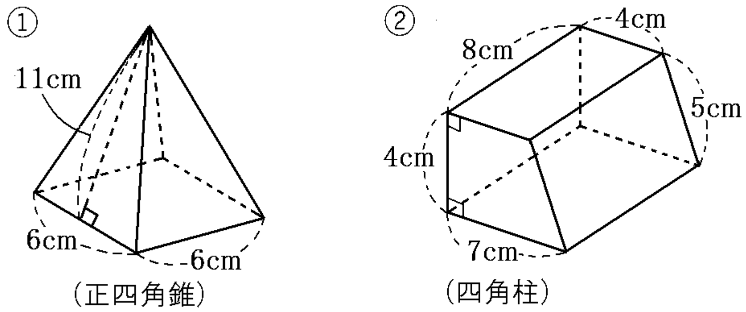
よって，(表面積)＝(底面積)×2＋(側面積)＝6×2＋60＝72 (cm^2)

(2) (底面積)＝4×4＝16 (cm^2)，(側面積)＝$\frac{1}{2}$×4×5×4＝40(cm^2)

よって，(表面積)＝16＋40＝56(cm^2)

[問題](後期期末)

次の図の立体の表面積を求めよ。



[解答欄]

①	②

[解答]①　168cm^2　②　204 cm^2

[解説]

①　(底面積)＝6×6＝36(cm^2)，(側面積)＝$\frac{1}{2}$×6×11×4＝132(cm^2)

よって，(表面積)＝36＋132＝168(cm^2)

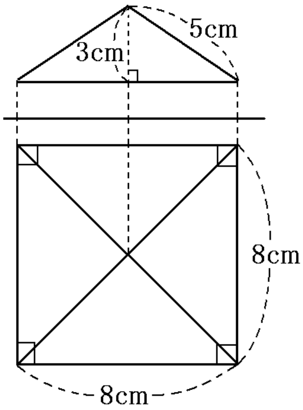
②　底面は台形なので，(底面積)＝$\frac{1}{2}$×(4＋7)×4＝22(cm^2)

(側面積)＝8×7＋8×4＋8×4＋8×5＝160(cm^2)

よって，(表面積)＝(底面積)×2＋(側面積)＝22×2＋160＝204(cm^2)

[問題](後期期末)

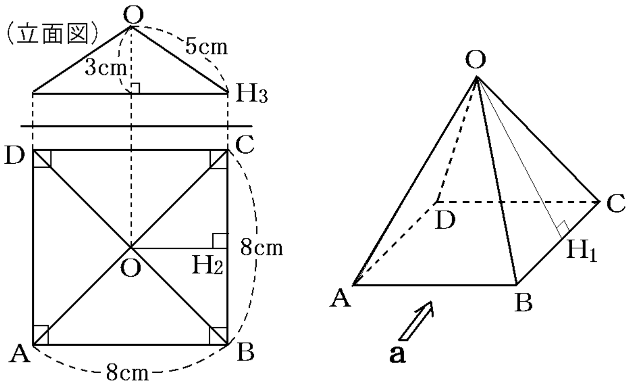
　次の投影図で表わされる立体の表面積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

右の見取図の OH_1 が△OBC の高さであるが, OH_1 は立面図の OH_3 と等しい。



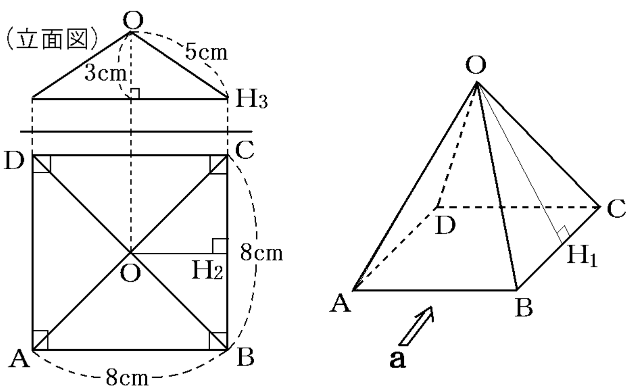
[解答]144cm²

[解説]

この立体は正四角錐である。

(底面積)＝8×8＝64(cm²)である。

側面積について, 右図の△OBC に注目する。底辺の長さは BC＝8cm である。右の見取図の OH_1 が△OBC の高さであるが, OH_1 は立面図の OH_3 と等しい。したがって, OH_1 の長さは 5cm である。



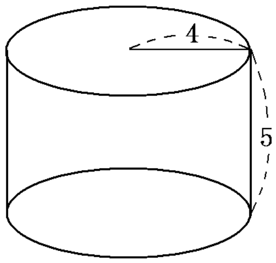
このことから, 側面の三角形の底辺は 8cm で, 高さは 5cm であることがわかる。したがって, (側面積)＝$\dfrac{1}{2}$×8×5×4＝80(cm²)

よって, (表面積)＝(底面積)＋(側面積)＝64＋80＝144(cm²) となる。

【】円柱の表面積

[問題](3 学期)

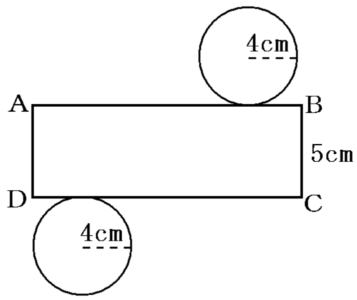
次の円柱の表面積を求めよ。ただし，単位は cm とする。



[解答欄]

[ヒント]

右図において，CD の長さと底面の円の円周の長さは等しい。



[解答]72π cm^2

[解説]

右図のような展開図をかくとわかりやすい。

右図において，CD の長さと底面の円の円周の長さは等しい。

(円周の長さ)$=2\pi\times4=8\pi$(cm)なので，

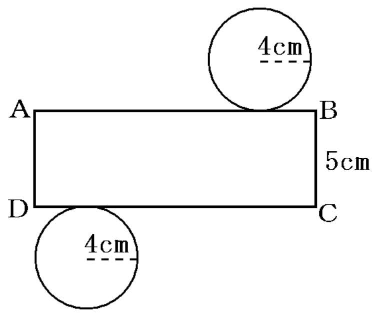
CD$=8\pi$(cm)

よって，(側面積)$=5\times8\pi=40\pi$(cm^2)

(底面積)$=\pi\times4^2=16\pi$(cm^2)

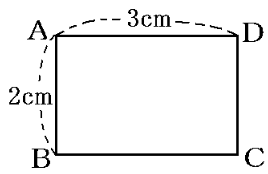
よって，(表面積)＝(底面積)×2＋(側面積)

$=16\pi\times2+40\pi=72\pi$(cm^2)



[問題](3 学期)

AB が 2cm, AD が 3cm の長方形 ABCD の辺 AB を軸として回転させてできる立体をア，辺 AD を軸として回転させてできる立体をイとする。このとき，次の各問いに答えよ。



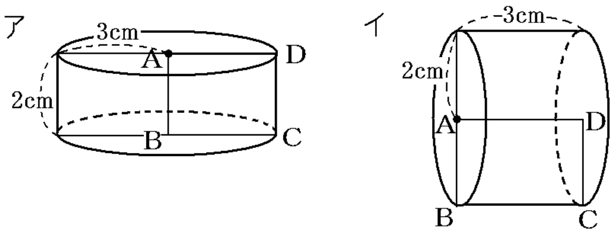
(1) 辺 AB を軸として回転させてできる立体アの表面積を求めよ。

(2) 辺 AD を軸として回転させてできる立体イの表面積を求めよ。

[解答欄]

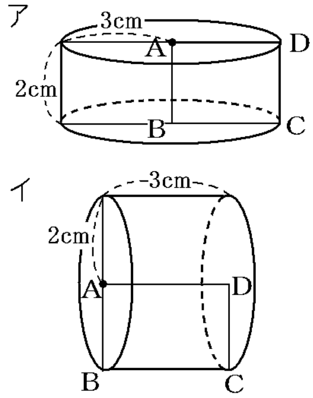
(1)	(2)

[ヒント]



[解答](1) $30\pi\,cm^2$　(2) $20\pi\,cm^2$

[解説]



(1) 辺 AB を軸として回転させてできる立体アの見取図は右のようになる。

底面は半径 3cm の円なので，(底面積)$=\pi\times3^2=9\pi(cm^2)$

円周の長さは，$2\pi\times3=6\pi(cm)$なので，

(側面積)$=2\times6\pi=12\pi(cm^2)$

(表面積)=(底面積)×2+(側面積)$=9\pi\times2+12\pi=30\pi(cm^2)$

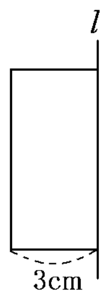
(2) 辺 AD を軸として回転させてできる立体イの見取図は右のようになる。底面は半径 2cm の円なので，(底面積)$=\pi\times2^2=4\pi(cm^2)$

円周の長さは，$2\pi\times2=4\pi(cm)$なので，(側面積)$=3\times4\pi=12\pi(cm^2)$

よって，(表面積)=(底面積)×2+(側面積)$=4\pi\times2+12\pi=20\pi(cm^2)$ となる。

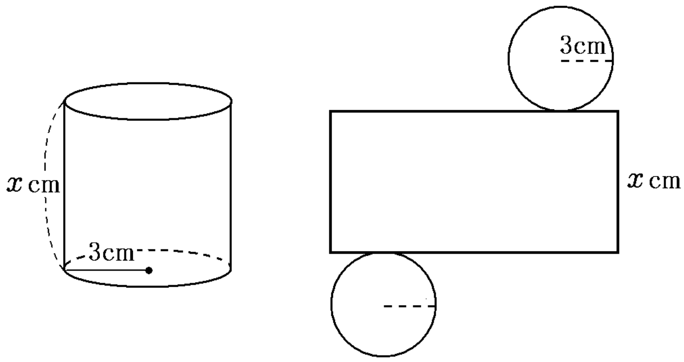
[問題](後期期末)

　右の長方形を，直線lを軸として 1 回転させてできる立体の表面積が $48\pi\,cm^2$ であるとき，長方形のたての長さを求めよ。



[解答欄]

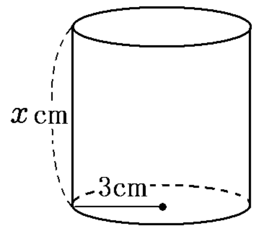
[ヒント]



[解答]5cm

[解説]

この立体のたての長さを x cm とする。底面の半径が 3cm なので，



円周の長さは，$2\pi\times3=6\pi$(cm)である。

よって，(側面積)$=x\times6\pi=6\pi x$(cm^2)である。

また，(底面積)$=\pi\times3^2=9\pi$(cm^2)

(表面積)＝(底面積)×2＋(側面積)$=48\pi$(cm^2) なので，

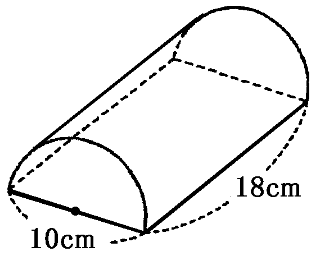
$9\pi\times2+6\pi x=48\pi$，$18\pi+6\pi x=48\pi$

両辺を π で割ると，$18+6x=48$，$6x=48-18$，$6x=30$

よって，$x=30\div6$，$x=5$ となる。

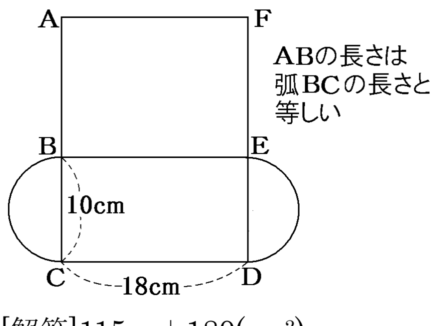
[問題](後期期末)

次の図の立体の表面積を求めよ。



[解答欄]

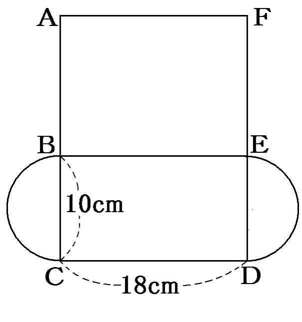
[ヒント]



[解答]$115\pi+180$(cm^2)

[解説]

右図のような展開図をかくとわかりやすい。



2 つの底面の半円を合わせると，直径が 10cm の円になるので，

(底面積の合計)$=\pi\times5^2=25\pi$(cm^2) となる。

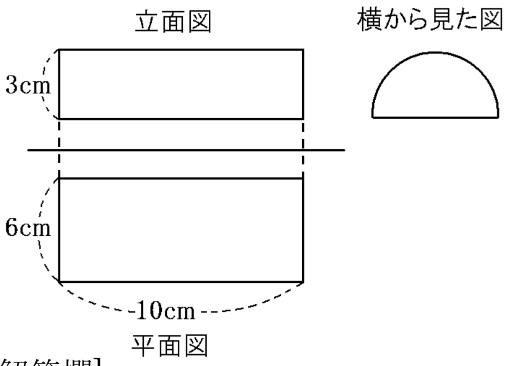
(BCDE の面積)$=10\times18=180$(cm^2)

AB の長さは弧 BC の長さと等しいので，

(AB の長さ)$=10\times\pi\div2=5\pi$(cm)

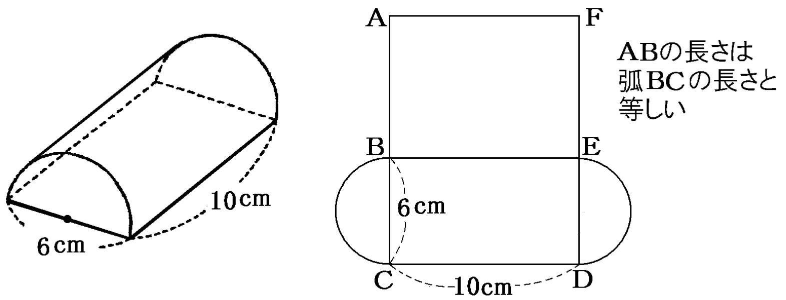
よって，(ABEF の面積)＝AB×BE＝5π×18＝90π(cm^2)
以上より，(表面積)＝(底面積の合計)＋(BCDE の面積)＋(ABEF の面積)
＝25π＋180＋90π＝115π＋180(cm^2)

[問題](3 学期)
　次の投影図で表わされる立体の表面積を求めよ。

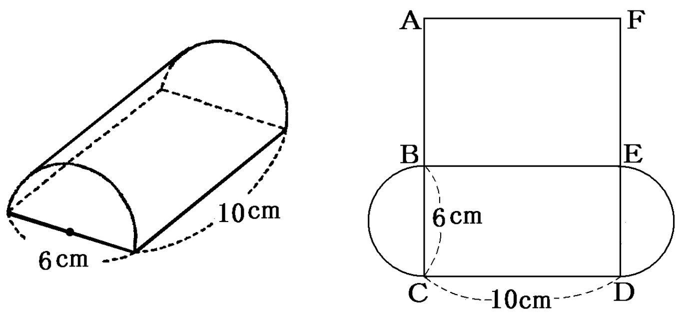


[解答欄]

[ヒント]



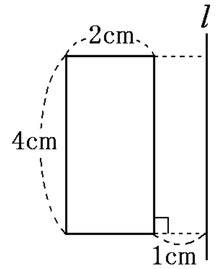
[解答]39π＋60(cm^2)
[解説]
この立体の見取図と展開図は右図のようになる。2 つの底面の半円を合わせると，直径が 6cm の円になるので，(底面積の合計)＝π×3^2＝9π(cm^2) となる。



(BCDE の面積)＝6×10＝60(cm^2)
AB の長さは弧 BC の長さと等しいので，(AB の長さ)＝6×π÷2＝3π(cm)
よって，(ABEF の面積)＝AB×BE＝3π×10＝30π(cm^2)
以上より，(表面積)＝(底面積の合計)＋(BCDE の面積)＋(ABEF の面積)
＝9π＋60＋30π＝39π＋60(cm^2)

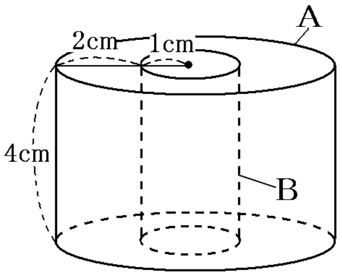
[問題](1 学期中間)

右図のような長方形を，直線lを軸として 1 回転させてできる立体の表面積を求めよ。



[解答欄]

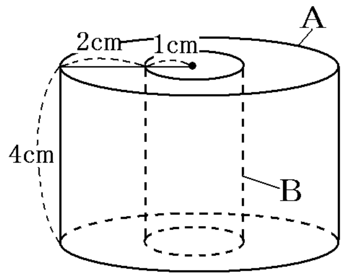
[ヒント]



[解答]48π cm^2

[解説]

直線lを軸として 1 回転させてできる立体は, 右図のように,
外側の円柱 A から内側の円柱 B をくりぬいた形になる。



(A の底面積)$=\pi\times3^2=9\pi$(cm^2)

(B の底面積)$=\pi\times1^2=\pi$(cm^2)

なので，底面の面積は，$9\pi-\pi=8\pi$(cm^2)となる。

A の円周の長さは，$2\pi\times3=6\pi$(cm)なので,

(A の側面積)$=4\times6\pi=24\pi$(cm^2)

B の円周の長さは，$2\pi\times1=2\pi$(cm)なので,

(B の側面積)$=4\times2\pi=8\pi$(cm^2)

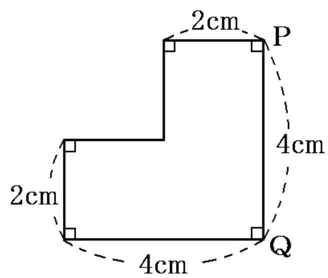
よって，(側面積)=(A の側面積)+(B の側面積)$=24\pi+8\pi=32\pi$(cm^2)

したがって，(表面積)=(底面積)×2+(側面積)$=8\pi\times2+32\pi=48\pi$(cm^2)

[問題](入試問題)

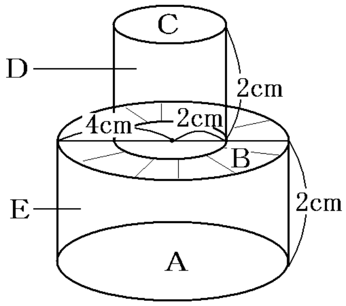
右の図形を，辺 PQ を軸として 1 回転させてできる立体の表面積を求めよ。

(千葉県)



[解答欄]

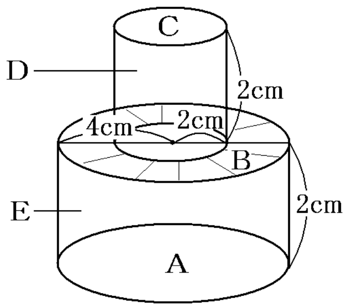
[ヒント]



(表面積)＝(A の面積)＋(B と C を合わせた面積)＋(側面積 D)＋(側面積 E)

[解答]56π cm^2

[解説]



右の図で，この回転体の表面積は，A の底面の円の面積，
C の底面の円の面積，B のドーナツ状の部分の面積，
D の側面積，E の側面積を合わせたものになる。
B と C を合わせた面積は A と同じになる。
よって，(A，B，C の面積の合計)＝$\pi \times 4^2 \times 2 = 32\pi$(cm^2)
D の側面を展開したものは長方形で，
縦が 2cm，横が $2\pi \times 2 = 4\pi$(cm)である。
よって，(D の部分の面積)＝$2 \times 4\pi = 8\pi$(cm^2)
E の側面を展開したものは長方形で，縦が 2cm，横が $2\pi \times 4 = 8\pi$(cm)である。
よって，(E の部分の面積)＝$2 \times 8\pi = 16\pi$(cm^2)
したがって，(表面積)＝$32\pi + 8\pi + 16\pi = 56\pi$(cm^2)

【】円錐の表面積

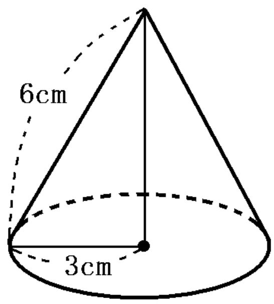
[問題](3 学期)

右図は底面の円の半径が 3cm, 母線の長さが 6cm の円錐である。次の各問いに答えよ。

(1) 側面を展開したおうぎ形の弧の長さを求めよ。

(2) 側面を展開したおうぎ形の中心角の大きさを求めよ。

(3) この円錐の表面積を求めよ。



[解答欄]

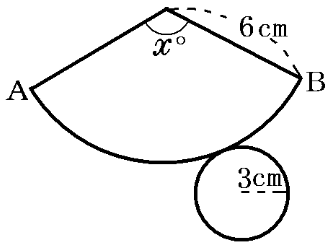
(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(弧 AB の長さ)＝(底面の円周の長さ)

(弧 AB の長さ)＝(円周)×$\dfrac{x}{360}$

→$\dfrac{x}{360}$が計算できる。



[解答](1) 6πcm　(2) 180°　(3) 27πcm^2

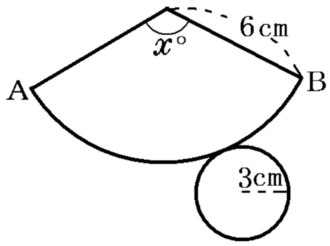
[解説]

問題の立体の展開図は右のようになる。

(1) おうぎ形の弧 AB の長さと底面の円周の長さは等しくなるので，(弧 AB の長さ)＝(底面の円周の長さ)

＝2π×3＝6π(cm)

(2) 中心角の大きさを x° とすると，



(弧 AB の長さ)＝(円周)×$\dfrac{(中心角)}{360}$＝2π×(半径)×$\dfrac{(中心角)}{360}$

＝2π×6×$\dfrac{x}{360}$＝$\dfrac{\pi}{30}x$(cm)　(1)より(弧 AB の長さ)＝6πcm なので，

$\dfrac{\pi}{30}x=6\pi$， $x=6\pi\div\dfrac{\pi}{30}=6\pi\times\dfrac{30}{\pi}=180$

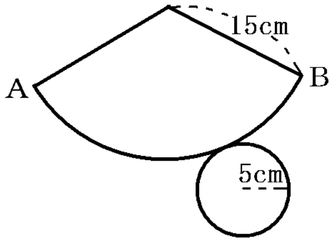
(3) (底面の円の面積)＝π×3^2＝9π(cm^2)

(側面のおうぎ形の面積)＝(円の面積)×$\dfrac{(中心角)}{360}$＝π×(半径)^2×$\dfrac{(中心角)}{360}$

＝π×6^2×$\dfrac{180}{360}$＝18π(cm^2)　よって，(表面積)＝9π＋18π＝27π(cm^2)

[問題](3 学期)

右図は，底面の半径が 5cm で，母線が 15cm の円錐の展開図である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 弧 AB の長さを求めよ。

(2) おうぎ形の中心角を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 10πcm　(2) 120°

[解説]

(1) おうぎ形の弧 AB の長さと底面の円周の長さは等しくなるので，

(弧 AB)＝(底面の円周)＝2π×5＝10π(cm)

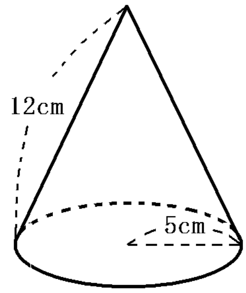
(2) 中心角を x° とすると，

$$(\text{弧 AB})=(\text{円周})\times\frac{(\text{中心角})}{360}=2\pi\times(\text{半径})\times\frac{(\text{中心角})}{360}=2\pi\times15\times\frac{x}{360}=\frac{\pi}{12}x$$

(1)より，$\frac{\pi}{12}x=10\pi$，よって $x=10\pi\div\frac{\pi}{12}=10\pi\times\frac{12}{\pi}=120$

[問題](3 学期)

右図のような，底面の半径が 5cm で，母線の長さが 12cm の円錐がある。この円錐について，次の各問いに答えよ。



(1) 底面積を求めよ。

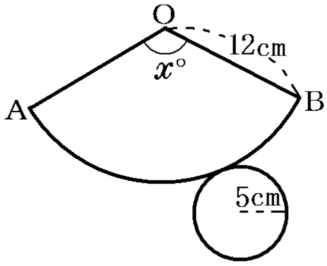
(2) 側面積を求めよ。

(3) 表面積を求めよ。

[解答欄]

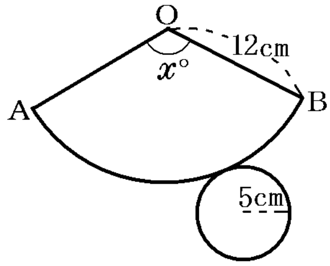
(1)	(2)	(3)

[ヒント]



[解答](1) 25π cm² (2) 60π cm² (3) 85π cm²

[解説]



(1) (底面の円の面積)＝$\pi\times5^2=25\pi$(cm²)

(2) まず中心角をx°とおく。

おうぎ形の弧ABの長さと底面の円周の長さは等しくなるので，

(弧ABの長さ)＝$2\pi\times12\times\dfrac{x}{360}=24\pi\times\dfrac{x}{360}$

(底面の円周の長さ)＝$2\pi\times5=10\pi$

よって，$24\pi\times\dfrac{x}{360}=10\pi$，$\dfrac{x}{360}=10\pi\div24\pi=\dfrac{10\pi}{24\pi}=\dfrac{5}{12}$

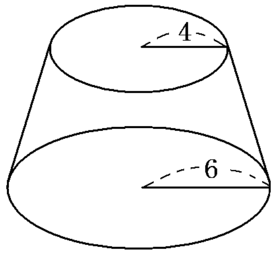
よって，$\dfrac{x}{360}=\dfrac{5}{12}$となる。これから，$x$を求めることもできるが，$\dfrac{x}{360}$の値のまま，側面積を計算するほうが簡単である。

(側面積)＝(おうぎ形OABの面積)＝$\pi\times12^2\times\dfrac{x}{360}=\pi\times12^2\times\dfrac{5}{12}=60\pi$(cm²)

(3) (表面積)＝(側面積)＋(底面積)＝$60\pi+25\pi=85\pi$(cm²)

[問題](3学期)

右図は，底面が半径6cm，母線が9cmの円錐の頂点から母線にそって6cmのところで底面に平行に上の円錐の部分を切り取った立体である。次の各問いに答えよ。



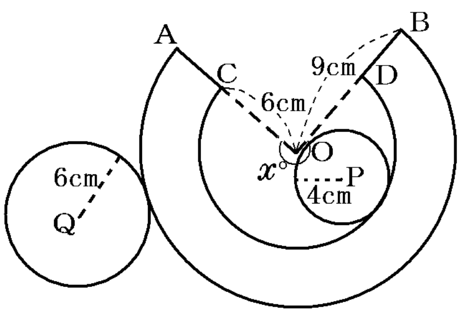
(1) 切り取った円錐の側面を展開したとき，その形はおうぎ形の一部になる。そのおうぎ形の中心角を求めよ。

(2) この立体の表面積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

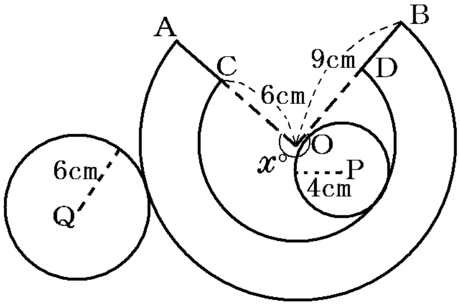


[解答](1) 240°　(2) 82π cm²

[解説]

(1) 求める中心角の大きさを x° とする。

右図において，おうぎ形 OAB の弧 AB の長さと，円 Q の円周の長さは等しい。



(弧 AB の長さ)＝(円周)×$\dfrac{(中心角)}{360}$

＝2π×(半径)×$\dfrac{(中心角)}{360}$＝2π×9×$\dfrac{x}{360}$

＝$\dfrac{\pi}{20}x$ (cm)

(円 Q の円周の長さ)＝2π×6＝12π(cm)

よって，$\dfrac{\pi}{20}x=12\pi$　　$x=12\pi\div\dfrac{\pi}{20}=12\pi\times\dfrac{20}{\pi}=240°$

(2) (おうぎ形 OAB の面積)＝π×9²×$\dfrac{240}{360}$＝54π(cm²)

(おうぎ形 OCD の面積)＝π×6²×$\dfrac{240}{360}$＝24π(cm²)

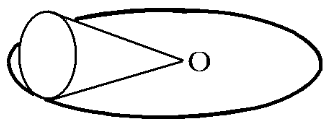
よって，(側面積)＝54π－24π＝30π(cm²)

(円 P の面積)＝π×4²＝16π(cm²)，(円 Q の面積)＝π×6²＝36π(cm²)

よって，(表面積)＝30π＋16π＋36π＝82π(cm²)

[問題](3 学期)

右図のように，底面の半径が 4cm の円錐を，頂点 O を中心として平面上で転がしたところ，太線で示した円の上を 1 周してもとの場所にかえるまでに，ちょうど 3 回転した。次の各問いに答えよ。



(1) 太線で示した円の周の長さを求めよ。

(2) 転がした円錐の表面積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) この円錐の底面の半径は 4cm なので，(底面の円周)＝2π×4＝8π(cm)

「太線で示した円の上を 1 周してもとの場所にかえるまでに，ちょうど 3 回転した。」とあるので，(太線で示した円の周の長さ)＝8π×3＝24π(cm) となる。

(2) 太線で示した円の半径を r cm とすると，円周が 24π cm なので，2πr＝24π

[解答](1) 24π cm　(2) 64π cm^2

[解説]

(1) この円錐の底面の半径は 4cm なので，(底面の円周)＝$2\pi\times4=8\pi$(cm)

「太線で示した円の上を 1 周してもとの場所にかえるまでに，ちょうど 3 回転した。」とあるので，(太線で示した円の周の長さ)＝$8\pi\times3=24\pi$(cm) となる。

(2) 太線で示した円の半径を r cm とすると，円周が 24π cm なので，

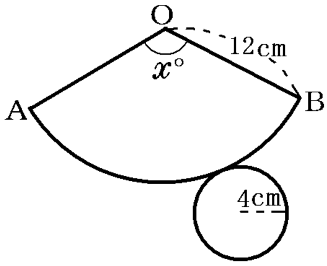
$2\pi r=24\pi$　よって，$r=24\pi\div2\pi=12$

したがって，この円錐は，底面の半径が 4cm で母線の長さが 12cm であることがわかる。

その展開図は右図のようになる。

側面のおうぎ形の中心角を x° とおく。

おうぎ形の弧 AB の長さと底面の円周の長さは等しくなる。



(弧 AB の長さ)＝$2\pi\times12\times\dfrac{x}{360}=24\pi\times\dfrac{x}{360}$(cm)

(底面の円周の長さ)＝$2\pi\times4=8\pi$(cm)

よって，$24\pi\times\dfrac{x}{360}=8\pi$，$\dfrac{x}{360}=8\pi\div24\pi=\dfrac{1}{3}$

よって，$\dfrac{x}{360}=\dfrac{1}{3}$ となる。これから，x を求めることもできるが，$\dfrac{x}{360}$ の値のまま，側面積を計算するほうが簡単である。

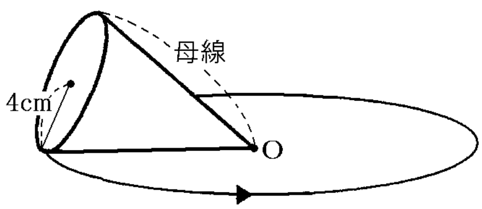
(側面積)＝(おうぎ形 OAB の面積)＝$\pi\times12^2\times\dfrac{x}{360}=\pi\times12^2\times\dfrac{1}{3}=48\pi$(cm^2)

また，(底面積)＝$\pi\times4^2=16\pi$(cm^2)

ゆえに，(表面積)＝(底面積)＋(側面積)＝$16\pi+48\pi=64\pi$(cm^2)

[問題](後期期末)

右図のような底面の半径が 4cm の円錐を，頂点 O を中心として平面上で転がしたところ，図に示した円 O の上を 1 周して戻るまでに 4.5 回転した。次の各問いに答えよ。



(1) この円錐の母線の長さは何 cm か。

(2) この円錐を 1 回転させたあとにできるおうぎ形の中心角を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 18cm　(2) 80°

[解説]

(1) 母線の長さを x cm する。

円 O は母線の長さ x cm を半径とする円なので，

(円 O の周の長さ)＝2×π×x＝2πx(cm)である。･･･①

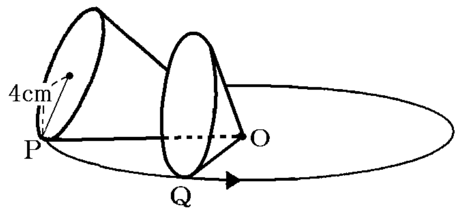
ところで，この円錐の底面の円の半径は 4cm であるので，

(底面の円の周の長さ)＝2×π×4＝8π(cm)である。

円錐を，頂点 O を中心として平面上で転がしたところ，円 O の上を 1 周して戻るまでに 4.5 回転したので，(円 O の周の長さ)＝8π(cm)×4.5＝36π(cm)･･･②

①，②より，2πx＝36πである。よって，x＝36π÷2π＝18

(2) 右図はこの円錐を 1 回転させたときのようすを表している。このときにできるおうぎ形は右図の OPQ である。



弧 PQ の長さは半径 4cm の底面の円の円周の長さに等しいので，(弧 PQ)＝2×π×4＝8π(cm)

(1)の②より，(円 O の周の長さ)＝36π(cm)

よって，このおうぎ形の中心角は，$360(°)\times\dfrac{8\pi}{36\pi}=80(°)$ である。

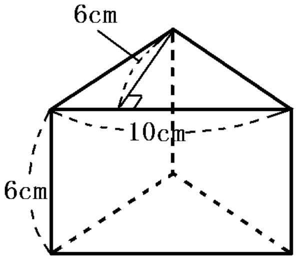
【】立体の体積

【】柱の体積

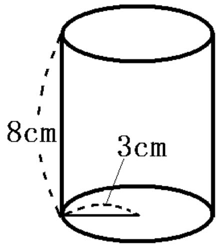
[問題](3 学期)

次の立体の体積を求めよ。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

柱(角柱，円柱)の体積は，(体積)＝(底面積)×(高さ)で求める。

[解答](1) 180cm^3　(2) 72πcm^3

[解説]

柱(角柱，円柱)の体積は，(体積)＝(底面積)×(高さ)で求める。

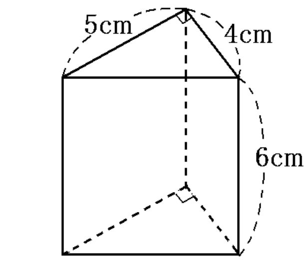
(1) (三角柱の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$\left(\dfrac{1}{2}\times10\times6\right)\times6=180$(cm^3)

(2) (円柱の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$(\pi\times3^2)\times8=72\pi$(cm^3)

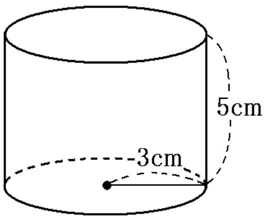
[問題](3 学期)

次の立体の体積を求めよ。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 60cm^3　(2) 45πcm^3

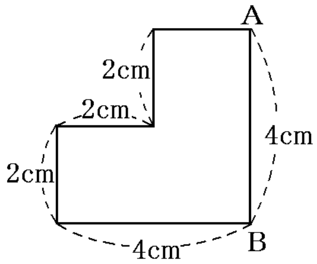
[解説]

(1) (三角柱の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$(\frac{1}{2}\times5\times4)\times6=60(\text{cm}^3)$

(2) (円柱の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$(\pi\times3^2)\times5=45\pi(\text{cm}^3)$

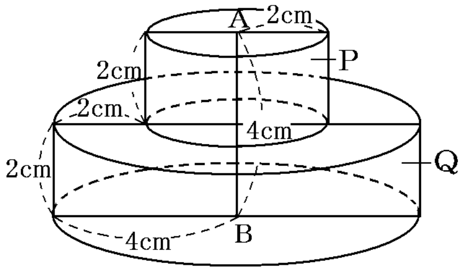
[問題](後期期末)

右の図形で，辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。



[解答欄]

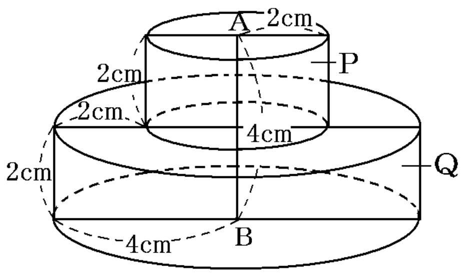
[ヒント]



[解答]$40\pi\text{cm}^3$

[解説]

この回転体は，右図のように，円柱 P(底面の半径が 2cm，高さが 2cm)と，円柱 Q(底面の半径が 4cm，高さが 2cm)を合せたものになっている。



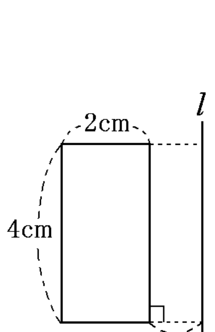
(円柱 P の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$(\pi\times2^2)\times2$
$=8\pi(\text{cm}^3)$

(円柱 Q の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$(\pi\times4^2)\times2$
$=32\pi(\text{cm}^3)$

したがって，この立体の体積は，$8\pi+32\pi=40\pi(\text{cm}^3)$である。

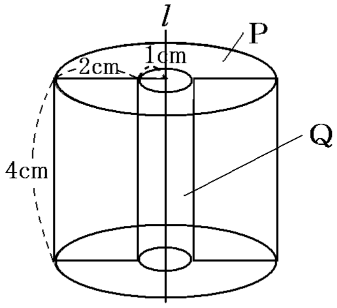
[問題](1 学期中間)

右図のような長方形を，直線lを軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。



[解答欄]

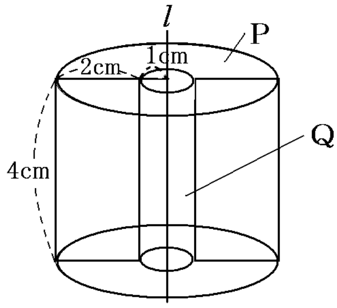
[ヒント]



[解答]32π cm^3

[解説]

この回転体は，右図のように，円柱 P(底面の半径が 3cm，高さが 4cm)から，円柱 Q(底面の半径が 1cm，高さが 4cm)をくりぬいたものである。



(円柱 P の体積)＝(底面積)×(高さ)＝($\pi\times3^2$)×4＝36π(cm^3)

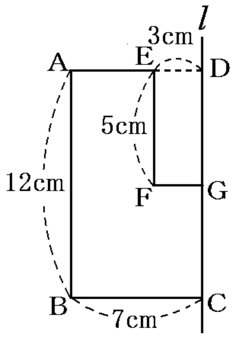
(円柱 Q の体積)＝(底面積)×(高さ)＝($\pi\times1^2$)×4＝4π(cm^3)

したがって，この立体の体積は，$36\pi-4\pi=32\pi$(cm^3)

である。

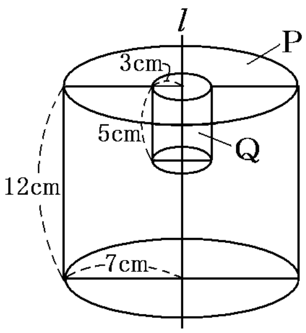
[問題](後期期末)

右図の長方形 ABCD から長方形 EFGD を取りのぞいた図形を，直線 l を軸として回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし，円周率を π とする。



[解答欄]

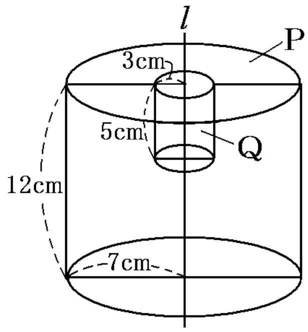
[ヒント]



[解答]543π cm^3

[解説]

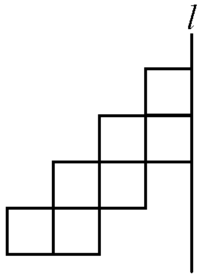
この回転体は，右図のように，円柱 P(底面の半径が 7cm，高さが 12cm)から，円柱 Q(底面の半径が 3cm，高さが 5cm)をくりぬいたものである。



(円柱 P の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$(\pi \times 7^2) \times 12 = 588\pi$(cm^3)
(円柱 Q の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$(\pi \times 3^2) \times 5 = 45\pi$(cm^3)
したがって，この立体の体積は，$588\pi - 45\pi = 543\pi$(cm^3)
である。

[問題](入試問題)

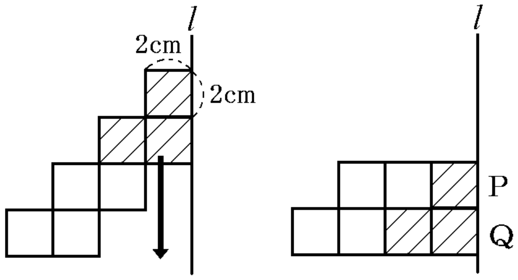
右の図のように，一辺の長さが 2cm の正方形を 7 枚組み合わせた図形がある。この図形を，直線 l を回転の軸として 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。



(鳥取県)

[解答欄]

[ヒント]



[解答]200π cm^3

[解説]

図 1 の斜線部分の 3 個の正方形を下方向に 4cm 平行移動すると，図 2 のようになる。このとき，図 1 の回転体の体積は，図 2 の回転体の体積と同じになる。

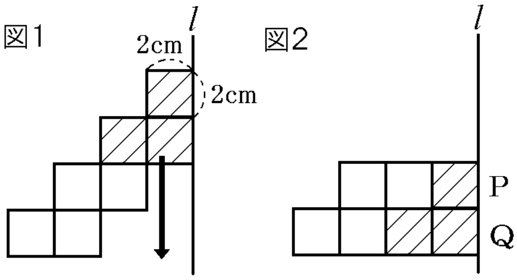


図 2 の P の段にある 3 個の正方形の部分を l を軸として 1 回転させてできる回転体は，底面の円の半径が $2 \times 3 = 6$cm，高さが 2cm の円柱になるので，体積は，
(底面積)×(高さ)＝$(\pi \times 6^2) \times 2 = 72\pi$(cm^3)となる。･･･①

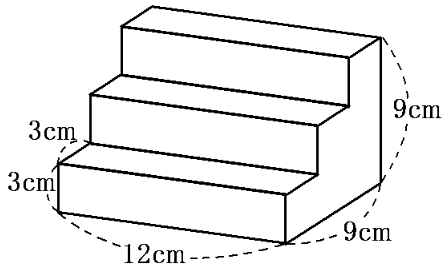
図 2 の Q の段にある 4 個の正方形の部分を l を軸として 1 回転させてできる回転体は，底面の円の半径が $2\times4=8$cm，高さが 2cm の円柱になるので，体積は，

(底面積)×(高さ)＝($\pi\times8^2$)×2＝128π(cm^3)となる。・・・②

①，②より，体積の合計は，72π＋128π＝200π(cm^3)になる。

[問題](1 学期中間)

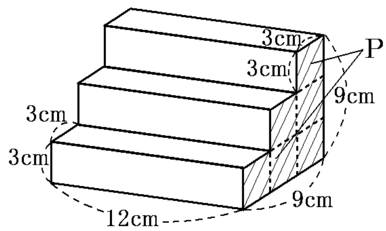
次の立体の体積を求めよ。ただし，角はすべて直角である。



[解答欄]

[ヒント]

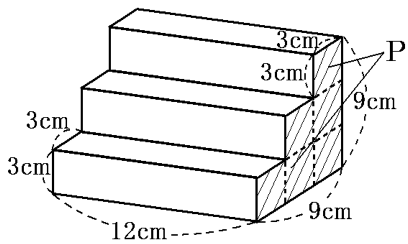
図の立体は，右図の P の面を底面と考えると，高さが 12cm の柱であると考えることができる。



[解答]648cm^3

[解説]

図の立体は, 右図の P の面を底面と考えると, 高さが 12cm の柱であると考えることができる。



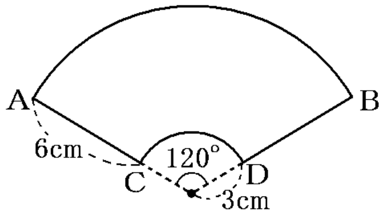
底面 P は，1 辺が 3cm の正方形が，1＋2＋3＝6(個)が集まったものなので，

(底面積)＝3×3×6＝54(cm^2)である。したがって，

(柱の体積)＝(底面積)×(高さ)＝54×12＝648(cm^3)

[問題](後期期末)

右の図のように，半径 9cm，中心角 120° のおうぎ形から半径 3cm のおうぎ形を切り取った図形がある。この図形を，それと垂直な方向に 5cm 動かして立体を作る。このときの体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]
(体積)＝(底面 ACDB の面積)×(高さ 5cm)

[解答]120π cm^3
[解説]
まず，この図形の底面積を求める。

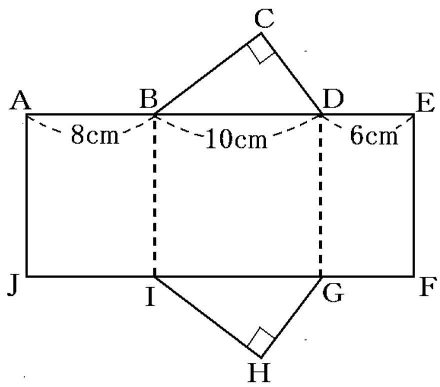
(おうぎ形の面積)＝(円の面積)×$\dfrac{(中心角)}{360}$＝π×(半径)^2×$\dfrac{(中心角)}{360}$

(外側のおうぎ形の面積)＝$\pi\times9^2\times\dfrac{120}{360}$＝$27\pi$(cm^2)

(内側のおうぎ形の面積)＝$\pi\times3^2\times\dfrac{120}{360}$＝$3\pi$(cm^2)

よって，(底面積)＝$27\pi-3\pi=24\pi$(cm^2)
(柱の体積)＝(底面積)×(高さ)で，(底面積)＝24π cm^2，(高さ)＝5cm なので，
(体積)＝24π (cm^2)×5(cm)＝120π(cm^3)

[問題](後期期末)
右の図は，三角柱の展開図であり，この展開図を組み立ててできる三角柱の表面積は 288cm^2 である。この三角柱の体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]
AB は BC と重なるので，BC＝AB＝8(cm)
また，ED は CD と重なるので，CD＝ED＝6(cm)
表面積が 288cm^2→AJ の長さを求める。

[解答]240cm^3
[解説]
展開図を組み立てたとき，AB は BC と重なるので，BC＝AB＝8(cm)
また，ED は CD と重なるので，CD＝ED＝6(cm)

(△BCD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×BC×CD＝$\dfrac{1}{2}\times8\times6$＝24(cm^2)

(△IHG の面積)＝(△BCD の面積)＝24(cm^2)

AJ＝x(cm)とおくと，

(長方形 AJFE の面積)＝AJ×AE＝x×(8＋10＋6)＝$24x$(cm^2)

(表面積)＝(△BCD の面積)＋(△IHG の面積)＋(長方形 AJFE の面積)＝288(cm^2)なので，

$24+24+24x=288$

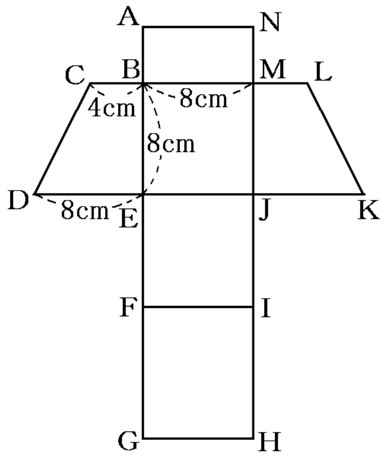
$24x=288-48$，$24x=240$，$x=240\div24$，$x=10$

よって，この三角柱の高さは 10cm である。

(三角柱の体積)＝(底面積)×(高さ)＝(△BCD の面積)×(高さ)＝24×10＝240(cm^3)

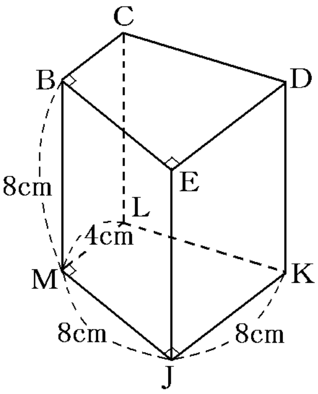
[問題](1 学期中間)

右の図は，ある立体の展開図である。この展開図を組み立ててできる立体の体積を求めよ。



[解答欄]

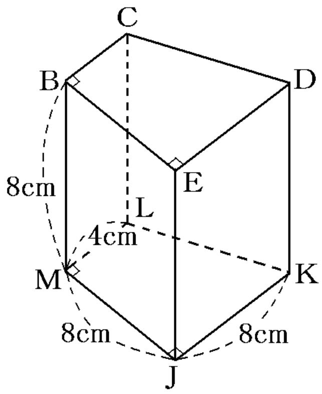
[ヒント]



[解答]384cm^3

[解説]

この展開図を組み立ててできる立体は，右図のような，底辺が台形である四角柱である。



(底面 MJKL の面積)＝$\frac{1}{2}$(ML＋JK)×MJ＝$\frac{1}{2}(4+8)\times8$

＝48(cm^2)

(高さ BM)＝8cm

(体積)＝(底面 MJKL の面積)×(高さ BM)＝48×8＝384(cm^3)

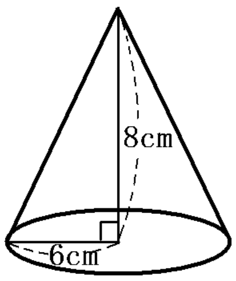
【】錐の体積

[錐の体積]

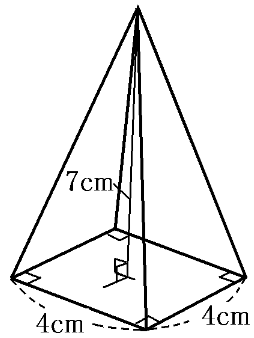
[問題](3 学期)

次の立体の体積を求めよ。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

錐(角錐，円錐)の体積は，(体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ) で求める。

[解答](1) 96π cm^3　(2) $\dfrac{112}{3}$cm^3

[解説]

錐(角錐，円錐)の体積は，(体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ) で求める。

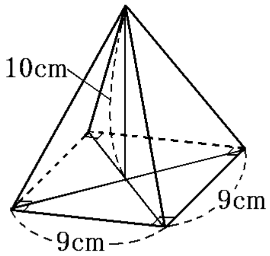
(1) (円錐の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}\times(\pi\times6^2)\times8=96\pi$(cm^3)

(2) (四角錐の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}\times(4\times4)\times7=\dfrac{112}{3}$(cm^3)

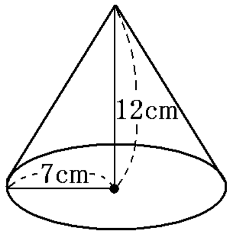
[問題](3 学期)

次の立体の体積を求めよ。

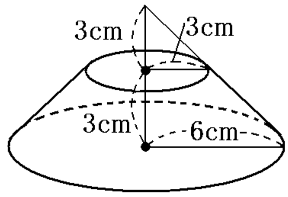
(1)



(2)



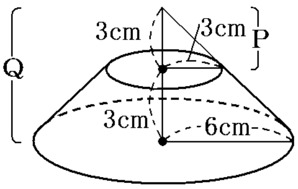
(3)



[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(3) 

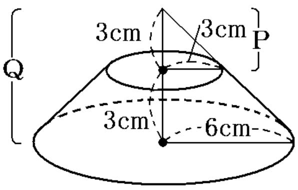
[解答](1) 270cm^3　(2) 196πcm^3　(3) 63πcm^3

[解説]

(1) (四角錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(9\times9)\times10=270$(cm^3)

(2) (円錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times7^2)\times12=196\pi$(cm^3)

(3) 右図において,



(P の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times3^2)\times3=9\pi$(cm^3)

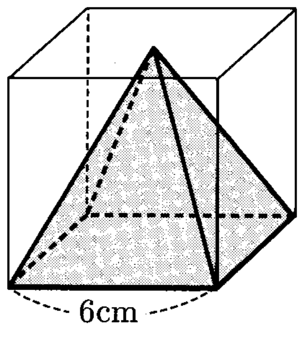
(Q の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times6^2)\times6=72\pi$(cm^3)

よって,(求める立体の体積)=(円錐 Q の体積)−(円錐 P の体積)$=72\pi-9\pi$
$=63\pi$(cm^3)

[問題](入試問題)

1 辺が 6cm の立方体と,底面が合同で高さが等しい正四角錐がある。この正四角錐の体積を求めよ。

(栃木県)



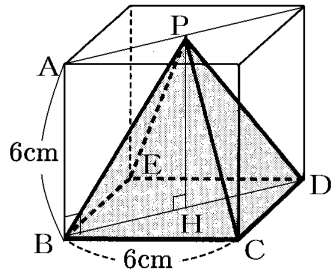
[解答欄]

[ヒント]

(錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)

[解答]72cm^3

[解説]

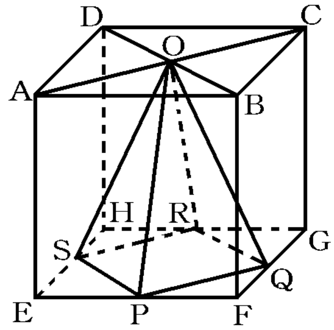


右図で，正方形 BCDE を底辺とすると，高さは PH である。

PH＝AB＝6(cm)

(錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(6\times 6)\times 6=72$(cm^3)

[問題](3 学期)



右図のような 1 辺が 6cm の立方体がある。AC と B D の交点を O，辺 EF，辺 FG，辺 GH，辺 HE の中点をそれぞれ P，Q，R，S とする。このとき，立方体の中にできる角錐 OPQRS について，次の各問いに答えよ。

(1) この角錐の名前を答えよ。

(2) この角錐の底面を四角形 PQRS とおくと，高さは何 cm か。

(3) この角錐の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(3) 底面の PQRS の面積は正方形 EFGH の半分になる。

[解答](1) 正四角錐　(2) 6cm　(3) 36cm^3

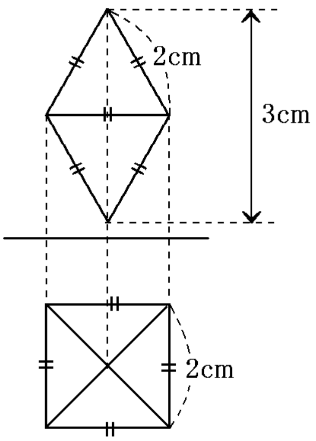
[解説]

(3) 底面の PQRS の面積は正方形 EFGH の半分で，6×6÷2＝18(cm^2)

(錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times 18\times 6=36$(cm^3)

[問題](後期期末)

次の投影図が表している立体の体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

この立体は，底面が 1 辺 2cm の正方形で高さが 1.5cm の正四角錐 2 個でできている。

[解答]4cm^3

[解説]

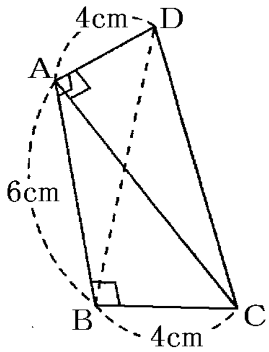
この立体は，底面が 1 辺 2cm の正方形で高さが 1.5cm の正四角錐 2 個でできている。

(正四角錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times 2\times 2\times 1.5=2(\text{cm}^3)$

(この立体の体積)$=2\times 2=4(\text{cm}^3)$

[問題](3 学期)

次の立体の体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

$\angle$DAB$=90^\circ$，$\angle$DAC$=90^\circ$ なので，DA は面 ABC に垂直である。

したがって，この立体は底面を△ABC とし，高さが DA の三角錐と考えることができる。

[解答]16cm^3

[解説]

$\angle$DAB$=90^\circ$，$\angle$DAC$=90^\circ$ なので，DA は面 ABC に垂直である。

したがって，この立体は底面を△ABC とし，高さが DA の三角錐と考えることができる。

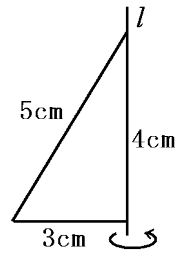
(錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積(△ABC の面積))$\times$(高さ DA)$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times$BC$\times$AB$\times$DA

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 4\times 6\times 4=16(\text{cm}^3)$

[回転体]

[問題](1 学期中間)

右図の直角三角形を，直線lを軸に回転させてできる立体の体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

図の直角三角形を, 直線lを軸に回転させてできる立体は, 底面の半径が 3cm で, 高さが 4cm の円錐になる。

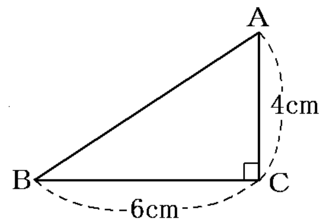
[解答]12π cm^3

[解説]

図の直角三角形を, 直線lを軸に回転させてできる立体は, 底面の半径が 3cm で, 高さが 4cm の円錐になる。(円錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times3^2)\times4=12\pi$(cm^3)

[問題](後期期末)

右図の直角三角形 ABC で，辺 AC を軸として 1 回転させてできる立体を P，辺 BC を軸として 1 回転させてできる立体を Q とするとき，P と Q の体積について，どちらの体積がどれだけ大きいか答えよ。



[解答欄]

[解答]P のほうが 16π cm^3 大きい。

[解説]

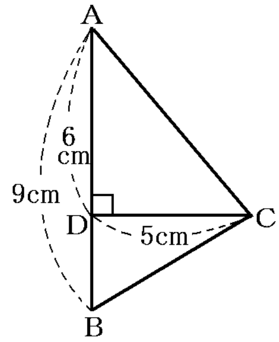
辺 AC を軸として 1 回転させてできる立体 P は，底面の半径が 6cm，高さが 4cm の円錐である。したがって，(円錐 P の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times6^2)\times4=48\pi$(cm^3)

辺 BC を軸として 1 回転させてできる立体を Q は，底面の半径が 4cm，高さが 6cm の円錐である。したがって，(円錐 Q の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times4^2)\times6=32\pi$(cm^3)

よって，P と Q では，P のほうが，$48\pi-32\pi=16\pi$(cm^3) 大きい。

[問題](入試問題)

右の図のように，∠A と∠B がともに 90°より小さい角である△ABC において，頂点 C から辺 AB にひいた垂線と辺 AB との交点を D とする。AB＝9cm，AD＝6cm，CD＝5cm のとき，△ABC を，辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし，円周率は π とする。



(宮城県)

[解答欄]

[ヒント]

△ACD を AB を軸として 1 回転させたときにできる円錐と，△BCD を AB を軸として 1 回転させたときにできる円錐に分けて考える。

[解答]$75\pi \text{cm}^3$

[解説]

△ACD と△BCD の 2 つの部分に分けて考える。

△ACD を辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体は，底面の半径が CD＝5cm，高さが AD＝6cm の円錐になるので，体積は，

$\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\frac{1}{3}\times(\pi\times5^2)\times6=50\pi(\text{cm}^3)$ になる。･･･①

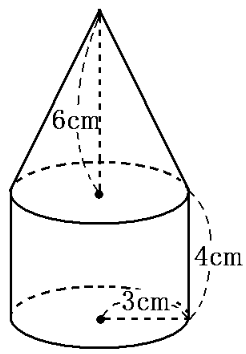
△BCD を辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体は，底面の半径が CD＝5cm，高さが BD＝9－6＝3(cm)の円錐になるので，体積は，

$\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\frac{1}{3}\times(\pi\times5^2)\times3=25\pi(\text{cm}^3)$ になる。･･･②

①，②より，求める体積は，$50\pi+25\pi=75\pi(\text{cm}^3)$ になる。

[問題](後期期末)

右の図の円錐と円柱を組み合わせた立体の体積を求めよ。



[解答欄]

[解答]$54\pi \text{cm}^3$

[解説]

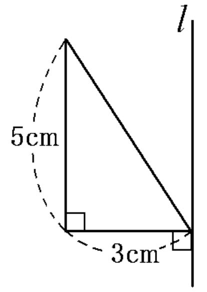
(円柱部分の体積)＝(底面積)×(高さ)＝(π×3^2)×4＝36π(cm^3)

(円錐部分の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×(π×3^2)×6＝18π(cm^3)

よって，この立体の体積は，36π＋18π＝54π(cm^3)

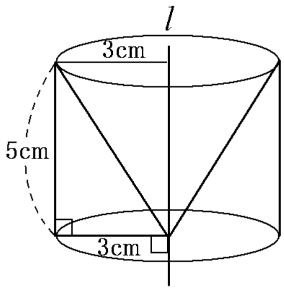
[問題](3 学期)

右の図で，直線lを軸として三角形を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。



[解答欄]

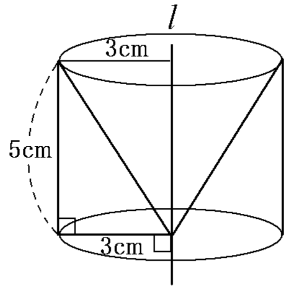
[ヒント]



[解答]30πcm^3

[解説]

求める立体の体積は，右図の円柱部分の体積から円錐部分の体積を引いたものである。



(円柱部分の体積)＝(底面積)×(高さ)＝(π×3^2)×5＝45π(cm^3)

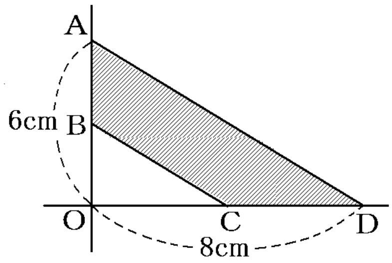
(円錐部分の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×(π×3^2)×5

＝15π(cm^3)

(求める立体の体積)＝(円柱部分の体積)－(円錐部分の体積)＝45π－15π＝30π(cm^3)

[問題](前期中間)

右の図の直角三角形AODの辺AOを6cm, 辺DOを8cmとし，2つの辺の中点をそれぞれ点B，Cとする。直角三角形AODから直角三角形BOCを切り取ってできる四角形ABCDの辺ABを軸として1回転させてできる立体の体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

△AODのAOを軸にして1回転してできる立体は, 底面の半径が8cmで高さが6cmの円錐

△BOCのBOを軸にして1回転してできる立体は, 底面の半径が4cmで高さが3cmの円錐

[解答]112π cm^3

[解説]

△AODのAOを軸にして1回転してできる立体は, 底面の半径が8cmで高さが6cmの円錐なので，(体積)$=\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\frac{1}{3}\times(\pi\times8^2)\times6=128\pi$(cm^3)

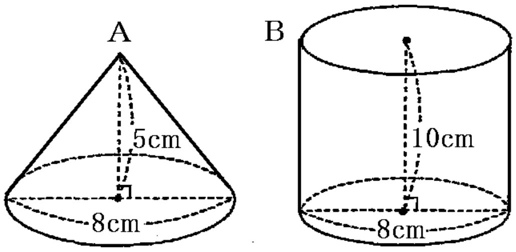
また，△BOCのBOを軸にして1回転してできる立体は，底面の半径が4cmで高さが3cmの円錐なので，(体積)$=\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\frac{1}{3}\times(\pi\times4^2)\times3=16\pi$(cm^3)

よって，求める体積は，$128\pi-16\pi=112\pi$(cm^3)

【】錐と柱の体積比較

[問題](3 学期)

次の図の円錐 A と円柱 B において，底面は，円の半径が等しく，同じ大きさである。円柱 B の体積は，円錐 A の体積の何倍か。



[解答欄]

[ヒント]

A，B の底面積は等しい。この底面積を S(cm^2)とおくと，

(円柱 B の体積)＝(底面積)×(高さ)＝S×10＝10S(cm^3)

(円錐 A の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×S×5＝$\frac{5}{3}$S(cm^3)

[解答]6 倍

[解説]

A，B の底面積は等しい。この底面積を S(cm^2)とおくと，

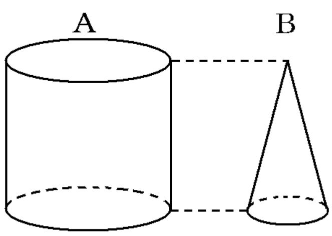
(円柱 B の体積)＝(底面積)×(高さ)＝S×10＝10S(cm^3)

(円錐 A の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×S×5＝$\frac{5}{3}$S(cm^3)

(円柱 B の体積)÷(円錐 A の体積)＝10S÷$\frac{5}{3}$S＝10÷$\frac{5}{3}$＝10×$\frac{3}{5}$＝6(倍)

[問題](1 学期期末)

右の図において，円柱 A と円錐 B は高さが等しく，A の底面の円の半径は，B の底面の円の半径の 2 倍である。A の体積は B の体積の何倍になるか。



[解答欄]

[ヒント]
A の底面の円の半径は，B の底面の円の半径の 2 倍なので，A の底面積は，B の底面積の $2^2=4$(倍)になる。したがって，B の底面積を S とすると，A の底面積は 4S(cm²)になる。

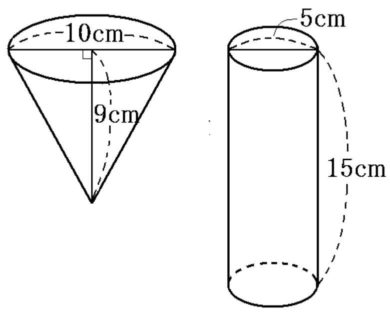
[解答]12 倍
[解説]
A の底面の円の半径は，B の底面の円の半径の 2 倍なので，A の底面積は，B の底面積の $2^2=4$(倍)になる。したがって，B の底面積を S とすると，A の底面積は 4S(cm^2)になる。
(円柱 A の体積)＝(底面積)×(高さ)＝4S×(高さ)(cm^3)

(円錐 B の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×S×(高さ)(cm^3)

円柱 A と円錐 B は高さが等しいので，

(円柱 A の体積)÷(円錐 B の体積)＝4S×(高さ)÷($\frac{1}{3}$×S×(高さ))＝4÷$\frac{1}{3}$＝4×3＝12(倍)

[問題](1 学期中間)
右図のような円錐の形をした容器に水をいっぱい入れ，それを，円柱の形をした容器に移すと水の深さはどれだけになるか。



[解答欄]

[ヒント]
円柱に入れた水の深さを x cm とすると，

(円柱に入れた水の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$\pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times x = \frac{25}{4}\pi x$ (cm^3)

[解答]12cm
[解説]
まず，この円錐の体積を求める。

(円錐の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×(π×5^2)×9＝75π(cm^3)

円柱に入れた水の深さを x cm とすると，

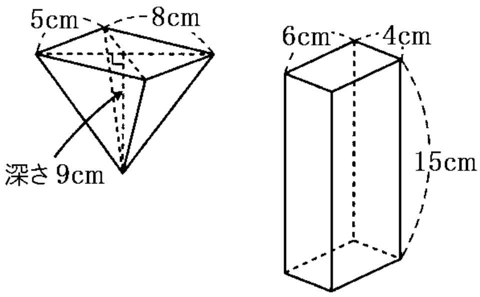
(円柱に入れた水の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$\pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times x = \frac{25}{4}\pi x$ (cm^3)

よって，$\dfrac{25}{4}\pi x=75\pi$，両辺を$\dfrac{25}{4}\pi$で割ると，

$x=75\pi\div\dfrac{25}{4}\pi=75\times\dfrac{4}{25}=12$ となる。

[問題](入試問題)

右の図のような，底面が長方形の四角錐の容器 A と直方体の容器 B がある。A を水でいっぱいに満たし，その水をこぼすことなく，すべて B に移す。B を水平な台の上に置いたとき，B に入った水の深さは何 cm になるか。ただし，容器の厚さは考えないものとする。



(福島県)

[解答欄]

[解答]5cm

[解説]

(四角錐 A の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times5\times8\times9=120$(cm^3)・・・①

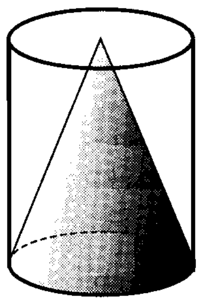
B に入った水の深さを x cm とすると，

(B に入った水の体積)＝(底面積)×(水の高さ)$=6\times4\times x=24x$(cm^3)・・・②

①，②より，$24x=120$　$x=120\div24=5$

[問題](入試問題)

円柱の容器 A と円錐の形をした鉄のおもり B がある。容器 A，おもり B は，どちらも底面の半径が 6cm，高さが 15cm である。右の図のように，容器 A におもり B を入れ，底面が水平な状態で水を入れていく。おもり B を入れた容器 A いっぱいにたまった水を，1 辺が 12cm の立方体の容器 C に残らず移した。容器 C の水面の高さを求めよ。ただし，容器 C は底面が水平になるように置いてあるものとする。また，容器の厚みは考えないものとする。また，円周率を π とする。



(長野県)

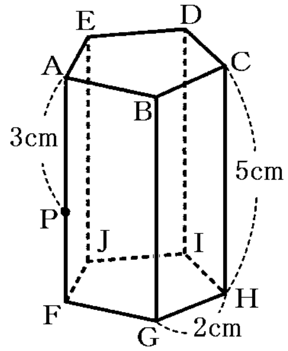
[解答欄]

[ヒント]
「おもり B を入れた容器 A いっぱいにたまった水」の体積は，容器 A の体積から B の体積を引いた量になる。

[解答]$\dfrac{5}{2}\pi$ cm

[解説]
「おもり B を入れた容器 A いっぱいにたまった水」の体積は，容器 A の体積から B の体積を引いた量になる。A は底面の半径が 6cm，高さが 15cm の円柱であるので，
(A の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$(\pi\times6^2)\times15=540\pi$ (cm^3)･･･①
B は底面の半径が 6cm，高さが 15cm の円錐であるので，
(円錐 B の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}\times(\pi\times6^2)\times15=180\pi$ (cm^3)･･･②
したがって，たまった水の体積は，①，②より，$540\pi-180\pi=360\pi$ (cm^3)になる。
次に，容器 C にたまった水の深さを x cm とすると，
(水がたまった部分の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$12\times12\times x=144x$ (cm^3)
よって，$144x=360\pi$ が成り立つ。$x=360\pi\div144=\dfrac{360}{144}\pi=\dfrac{5}{2}\pi$ (cm)

[問題](入試問題)
　右の図のような，底面が 1 辺 2cm の正五角形で高さが 5cm である正五角柱 ABCDE－FGHIJ があり，辺 AF 上に AP＝3cm となる点 P がある。正五角柱 ABCDE－FGHIJ の体積を Scm^3，五角錐 P－FGHIJ の体積を Tcm^3 とする。このとき，2 つの図形の体積の比 S : T を，最も簡単な整数の比で表せ。
(栃木県)



[解答欄]

[ヒント]
底面 FGHIJ の面積を a (cm^2)とする。
(正五角柱の体積 S)＝(底面積)×(高さ CH)
(五角錐の体積 T)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ PF)

[解答]15 : 2

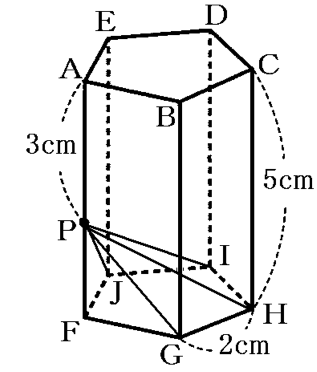
[解説]

底面 FGHIJ の面積を $a\,(\mathrm{cm}^2)$とする。

(正五角柱の体積 S)＝(底面積)×(高さ CH)＝ $a \times 5 = 5a\,(\mathrm{cm}^3)$

(五角錐の体積 T)＝ $\frac{1}{3}$ ×(底面積)×(高さ PF)＝ $\frac{1}{3} \times a \times (5-3)$

$= \frac{1}{3} \times a \times 2 = \frac{2}{3}a\,(\mathrm{cm}^3)$



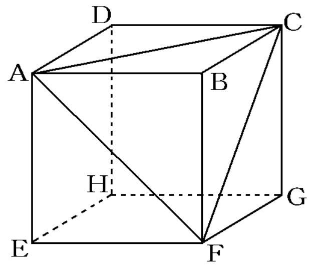
(正五角柱の体積 S)：(五角錐の体積 T)＝ $5a : \frac{2}{3}a$

$= 5 : \frac{2}{3} = 15 : 2$

【】立体の切断など

[問題](後期期末)

右の図のような，1 辺の長さが 6cm の立方体 ABCD－EFGH がある。4 つの点 A，B，C，F を頂点とする立体の体積は，立方体 ABCD－EFGH の何分の 1 か。



[解答欄]

[ヒント]

4 つの点 A，B，C，F を頂点とする立体は三角錐である。△ABC を底面とすると，高さは BF になる。

[解答]6 分の 1($\frac{1}{6}$)

[解説]

(立方体 ABCD－EFGH の体積)＝6×6×6＝216(cm^3)

4 つの点 A，B，C，F を頂点とする立体は三角錐である。△ABC を底面とすると，高さは BF になる。

(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}$×AB×BC＝$\frac{1}{2}$×6×6＝18(cm^2)，BF＝6(cm)なので，

(錐の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×(△ABC の面積)×BF

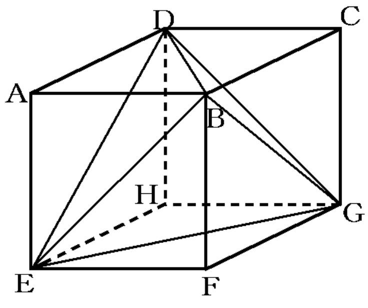
＝$\frac{1}{3}$×18×6＝36(cm^3)

よって，216(cm^3)÷36(cm^3)＝6 なので，点 A，B，C，F を頂点とする立体の体積は，立方体 ABCD－EFGH の 6 分の 1 になる。

[問題](入試問題)

右図の立体 ABCD－EFGH は，1 辺が 6cm の立方体である。図において，4 点 B，D，E，G を頂点とする立体 BDEG の体積を求めよ。

(石川県)

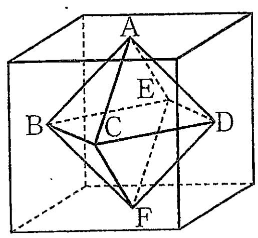


[解答欄]

[ヒント]
図の立体 BDEG は，図の立方体から，同じ形の 4 つの三角錐を切り取ったものである。

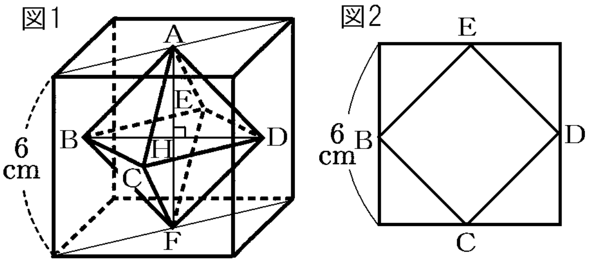
[解答]72cm^3
[解説]
図の立体 BDEG は，図の立方体から，同じ形の 4 つの三角錐を切り取ったものである。
(立方体の体積)＝6×6×6＝216(cm^3)
三角錐 ABDE で，△ABD を底面とすると高さは AE である(AE は平面 ABD に垂直)。
(三角錐 ABDE の体積)＝$\frac{1}{3}$×(△ABD の面積)×(高さ AE)＝$\frac{1}{3}$×($\frac{1}{2}$×AB×AD)×AE
＝$\frac{1}{3}$×$\frac{1}{2}$×6×6×6＝36(cm^3)
(立体 BDEG の体積)＝(立方体の体積)－(三角錐の体積)×4＝216－36×4＝216－144
＝72(cm^3)

[問題](3 学期)
右図のように，立方体の各面の対角線の交点を結ぶと正八面体ができる。立方体の 1 辺が 6cm のとき，この正八面体の体積を求めよ。

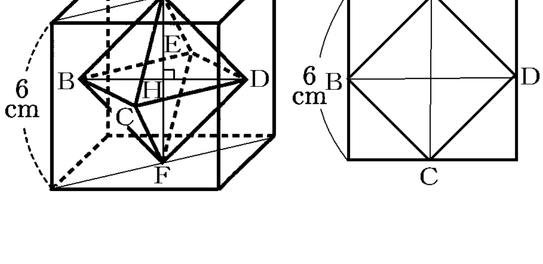


[解答欄]

[ヒント]



[解答]36 cm^3
[解説]
右の図 1 で正四角錐 ABCDE の体積を求める。
この正四角錐の高さは，AH＝6÷2＝3(cm)
図 2 でわかるように，底面の正方形 BCDE の面積は, 外側を囲む 1 辺が 6cm の正方形の半分であるので,
(正方形 BCDE の面積)＝6×6÷2＝18(cm^2)

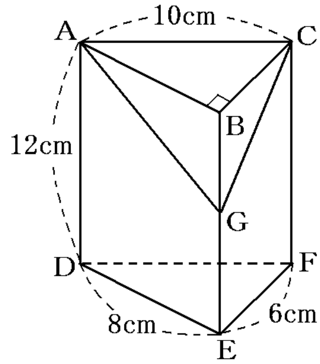


よって，(正四角錐 ABCDE の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×18×3＝18(cm^3)

したがって，(正八面体の体積)＝18×2＝36(cm^3)

[問題](後期期末)

右図のような三角柱 ABC－DEF を，辺 BE の中点 G と辺 AC を通る平面で切断した。このとき残った立体 AGC－DEF の体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

(三角柱 ABC－DEF の体積)－(三角錐 GABC の体積) で求める。

[解答]240cm^3

[解説]

(三角柱 ABC－DEF の体積)－(三角錐 GABC の体積) で求める。

(共通の底面の面積)＝(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}$×AB×CB＝$\frac{1}{2}$×8×6＝24(cm^2)

(三角柱 ABC－DEF の体積)＝(底面積)×(高さ AD)＝24×12＝288(cm^3)

(三角錐 GABC の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ BG)＝$\frac{1}{3}$×24×6＝48(cm^3)

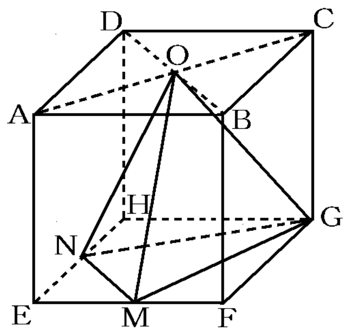
(AGC－DEF の体積)＝(三角柱 ABC－DEF の体積)－(三角錐 GABC の体積)

＝288－48＝240(cm^3)

[問題](後期期末)

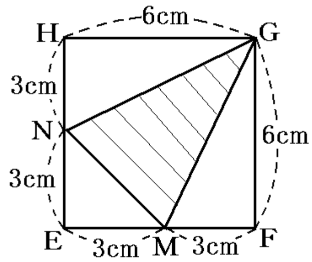
右の図のように，1 辺が 6cm の立方体 ABCD－EFGH の辺 EF，EH の中点をそれぞれ M，N とし，正方形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を O とする。

このとき，四面体 O－GMN の体積を求めよ。



[解答欄]

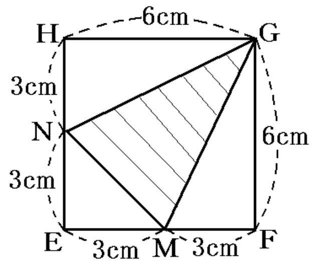
[ヒント]



四面体 O－GMN の底面を△GMN とすると，高さは O から底面 GMN におろした垂線の長さで AE と同じ 6cm になる。
底面の△GMN の面積は，外側の正方形から 3 つの三角形の面積を引いて求める。

[解答]27cm³

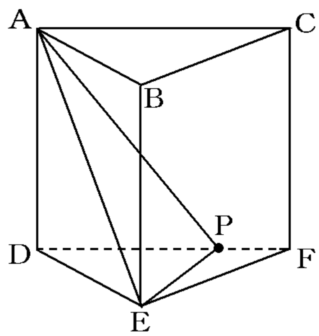
[解説]



四面体 O－GMN の底面を△GMN とすると，高さは O から底面 GMN におろした垂線の長さで AE と同じ 6cm になる。
そこで，右図に示した底面の△GMN の面積を求める。
(△GMN)＝(正方形 EFGH)－(△NME)－(△FGM)－(△HGN)
$=6\times6-\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times3\times6-\frac{1}{2}\times6\times3=36-\frac{9}{2}-9-9=\frac{27}{2}$ (cm²)
よって，(四面体 O－GMN の体積)＝$\frac{1}{3}$×(△GMN の面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}\times\frac{27}{2}\times6=27$(cm³)

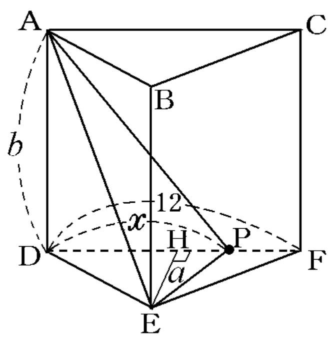
[問題](後期期末)

右の図のように三角柱 ABC－DEF の辺 DF 上に点 P をとり，三角柱 ABC－DEF の体積が三角錐 A－DEP の体積の 4 倍になるようにする。DF＝12cm のとき，DP の長さを求めよ。



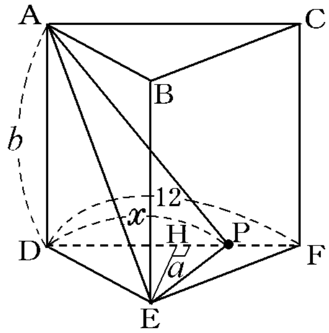
[解答欄]

[ヒント]



[解答]9 cm

[解説]



右図のように，DP＝x cm，AD＝b cm とする。
また，底面の△DEF で，底辺を DF としたときの高さを EH＝a cm とする。
(三角柱 ABC−DEF の体積)＝(△DEF の面積)×(高さ AD)

$$=\left(\frac{1}{2}\times \mathrm{DF}\times \mathrm{EH}\right)\times \mathrm{AD}=\frac{1}{2}\times 12\times a\times b=6ab\ (\mathrm{cm}^3)$$

(三角錐 A−DEP の体積)＝$\frac{1}{3}$×(△DPE の面積)×(高さ AD)

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times \mathrm{DP}\times \mathrm{EH}\right)\times \mathrm{AD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times x\times a\times b=\frac{abx}{6}\ (\mathrm{cm}^3)$$

「三角柱 ABC−DEF の体積が三角錐 A−DEP の体積の 4 倍になる」ので，

$6ab=\frac{abx}{6}\times 4$，両辺を ab で割ると，$6=\frac{4}{6}x$

よって，$x=6\div\frac{4}{6}=6\times\frac{6}{4}=\frac{36}{4}=9\ (\mathrm{cm})$

[問題](入試問題)

健さんは, 図 1 のような 1 辺の長さが 6cm の立方体の形をした容器 ABCD−EFGH を使って, 水の体積を調べてみることにした。次の各問いに答えよ。ただし, 容器の厚さは考えないものとする。

図1

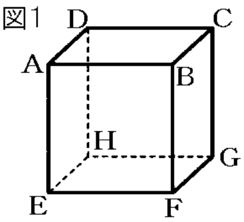
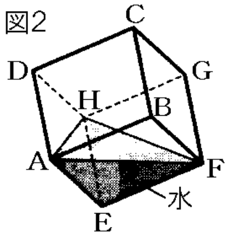


図2



(1) 健さんが，図 1 の容器に水を入れて密閉し，傾けたところ，図 2 のように水面は△AFH になった。このときの水の体積を求めよ。
(2) 次に，健さんは，水の入った図 2 の容器を，面 EFGH が底になるように水平な台に置いた。このとき，面 EFGH から水面までの高さを求めよ。

(山形県)

[解答欄]

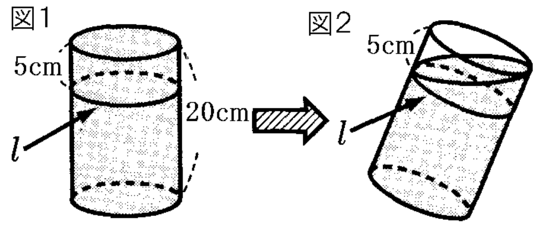
(1)	(2)

[ヒント]

(三角錐 AEFH の体積)＝$\frac{1}{3}$×(△AEH の面積)×(高さ FE)

[解答](1) 36cm³　(2) 1cm

[解説]
(1) 水の体積は，図の三角錐 AEFH の体積と同じである。
三角錐 AEFH の底面を AEH とすると，高さは FE になる(辺 FE は平面 AEH と垂直)。
(三角錐 AEFH の体積)＝$\frac{1}{3}$×(△AEH の面積)×(高さ FE)＝$\frac{1}{3}$×($\frac{1}{2}$×AE×HE)×FE
＝$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times 6\times 6$＝36(cm^3)
(2) 面 EFGH から水面までの高さを x (cm)とすると，
(水の体積)＝EF×FG× x ＝36,
6×6× x ＝36， 36x＝36， x ＝36÷36＝1(cm)

[問題](後期期末)


右の図 1 のように，高さが 20cm の円柱形の容器に，水がいっぱいに入っている。この容器の側面には上端から 5cm の位置に線 l がかかれている。この容器を傾けて水をこぼしていき，図 2 のように水面が線 l に届いたところで傾けるのをやめた。このとき，残った水の量とこぼれ出た水の量の比を，もっとも簡単な整数の比で表せ。
[解答欄]

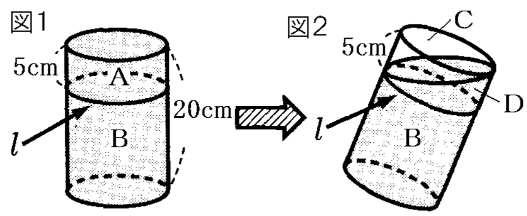
[ヒント]


図 1 の A は，図 2 の C＋D
こぼれ出た水は右の図 2 の C の部分
C と D の体積は同じになる。

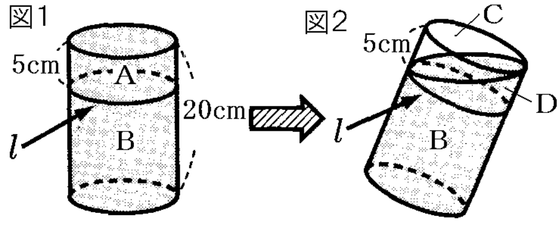
[解答]7：1
[解説]
この円柱形の容器の底面積を S とすると，


図 1 の A の円柱の高さは 5cm, B の円柱の高さは 20－5＝15(cm)なので,
(A の体積)＝(底面積)×(高さ)＝S×5＝5S(cm^3)
(B の体積)＝(底面積)×(高さ)＝S×15
＝15S(cm^3)
図 2 で，C と D の体積は等しく，C と D の体積の和は A の体積(5S(cm^3))と等しいので,

(C の体積)＝(D の体積)＝(A の体積)÷2＝5S÷2＝2.5S(cm^3)

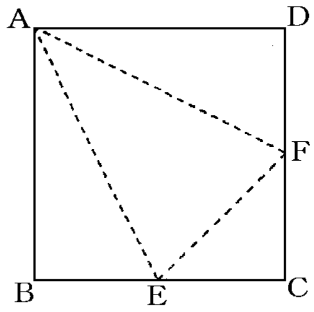
(残った水の量)＝(B の体積)＋(D の体積)＝15S＋2.5S＝17.5S(cm^3)

(こぼれ出た水の量)＝(C の体積)＝2.5S(cm^3)

よって，(残った水の量)：(こぼれ出た水の量)＝17.5S：2.5S＝175：25＝7：1

[問題](3 学期)

右の図は, 1 辺の長さが 10cm の正方形で, 点 E, F は辺 BC, CD の中点である。点線を折り目として，3 点 B，C，D が 1 点で重なるように折り，三角錐をつくる。この三角錐の体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

右図は組み立ててできた三角錐の見取り図である。

△CEF を底面とすると，高さは辺 AB になる。

図1

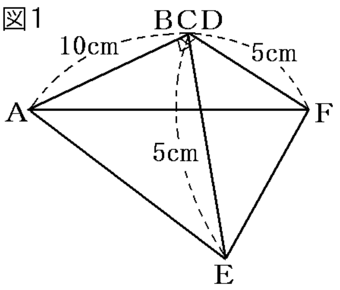
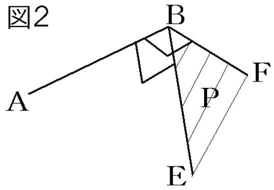


図2

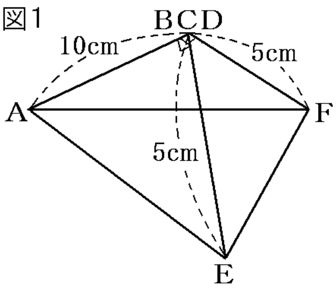


[解答] $\dfrac{125}{3}$ cm^3

[解説]

右図は組み立ててできた三角錐の見取り図である。どの面を底面にするかが，この問題のポイントである(例えば，△AEF を底面にすると，高さを求めることができない)。

図1



そこで，右図の平面 CEF と直線 AB に注目する。直線 AB が平面 CEF に垂直ならば，AB を高さとすることができる。

図2

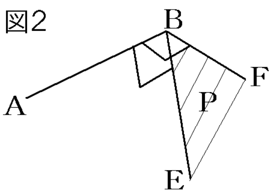


図 2 で，直線 AB が，平面 P 上の直線 BE，BF とそれぞれ垂直に交わっていれば，直線 AB は平面 P に垂直になる。したがって，△CEF を底面とすると，高さは辺 AB になる。

(△CEF の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×CE×CF＝$\dfrac{1}{2}\times5\times5=\dfrac{25}{2}$(cm^2)なので,

(三角錐の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積△CEF)×(高さ AB)＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{25}{2}\times10=\dfrac{125}{3}$(cm^3)

[問題](3 学期)

図 1 の 1 辺の長さが 12cm の正方形を折って，図 2 のように三角すい A－BCD をつくる。このとき，次の各問いに答えよ。

図1

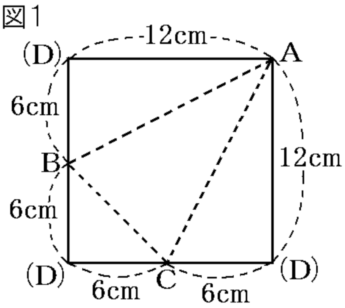
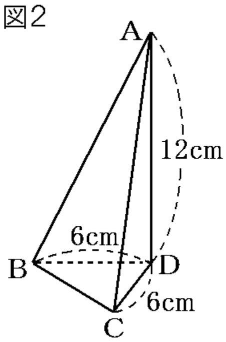


図2



(1) 三角すい A－BCD の体積を求めよ。

(2) △ABC を底面としたときの三角すいの高さを求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) 図 2 で，△BCD を底面にしたとき，AD が高さになる。

(2) まず，底面の△ABC の面積を求める。図 1 より，

(△ABC の面積)＝(正方形の面積)－(△BCD の面積)－(△ABD の面積)－(△ACD の面積)

(1)で求めたこの三角錐の体積と，底面の△ABC の面積から高さを求めることができる。

[解答](1) 72cm^3　(2) 4cm

[解説]

(1) 図 2 の三角すい A－BCD で，△BCD を底面にしたとき，AD が高さになるかどうかがポイントである。∠ADB＝90°，∠ADC＝90°なので，AD⊥底面 BCD となり，AD は間違いなく高さになる。

図 1 より，△BCD で∠BDC は直角なので，

(△BCD の面積)＝$\frac{1}{2}$×CD×BD＝$\frac{1}{2}$×6×6＝18(cm^2)

よって，

(三角すい A－BCD の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ AD)＝$\frac{1}{3}$×18×12＝72(cm^3)

(2) まず，底面の△ABC の面積を求める。図 1 より，

(△ABC の面積)＝(正方形の面積)－(△BCD の面積)－(△ABD の面積)－(△ACD の面積)

＝12×12－$\frac{1}{2}$×6×6－$\frac{1}{2}$×12×6－$\frac{1}{2}$×12×6＝144－18－36－36＝54(cm^2)

△ABC を底面としたときの三角すいの高さを x cm とすると，(1)より，

(三角すい A－BCD の体積)$=\frac{1}{3}\times$(底面積 ABC)$\times$(高さ)$=72$(cm^3)

よって，$\frac{1}{3}\times 54\times x=72$，$18x=72$，　$x=72\div 18=4$

【】球の表面積・体積

[球の表面積・体積の公式]

[問題](3 学期)

　半径 2cm の球の表面積，および体積を求めよ。

[解答欄]

表面積：	体積：

[ヒント]

球の半径を r とすると，

(表面積)＝$S=4\pi r^2$，(体積)＝$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

[解答]表面積：16π cm^2　体積：$\dfrac{32}{3}\pi$ cm^3

[解説]

半径の球の表面積を S，体積を V とすると，$S=4\pi r^2$ (円の面積の 4 倍)

$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (「身(3)の上に心(4)配(π)あー(r)るの 3 乗」と覚えておく)

したがって，半径 2cm の球については，

(表面積)＝$S=4\pi r^2=4\pi\times 2^2=16\pi$ (cm^2)

(体積)＝$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\times 2^3=\dfrac{32}{3}\pi$ (cm^3)

[問題](3 学期)

　半径 3cm の球の表面積，および体積を求めよ。

[解答欄]

表面積：	体積：

[解答]表面積：36π cm^2　体積：36π cm^3

[解説]

(表面積)＝$S=4\pi r^2=4\pi\times 3^2=36\pi$ (cm^2)

(体積)＝$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\times 3^3=36\pi$ (cm^3)

[問題](3 学期)

　次の式をかけ。

(1) 半径 r の球の表面積 S を求める式。

(2) 半径 r の球の体積 V を求める式。

[解答欄]

(1)	(2)

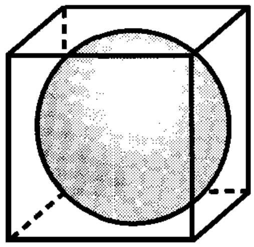
[解答](1) $S=4\pi r^2$　(2) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

[球・円柱・円錐]

[問題](入試問題)

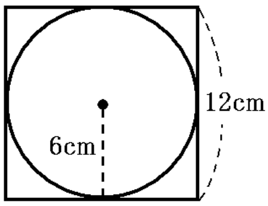
右の図のように，1 辺の長さが 12cm の立方体のすべての面に接している球がある。この球の体積を求めよ。ただし，円周率は π を用いること。

(高知県)



[解答欄]

[ヒント]

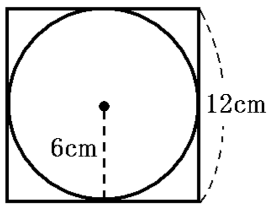


[解答]288 π cm^3

[解説]

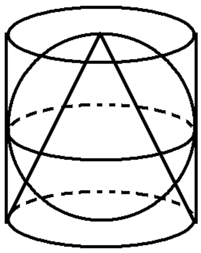
右図から，この球の半径は 6cm である。したがって，

(体積)＝$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\times 6^3$＝288 π ($cm^3$)



[問題](3 学期)

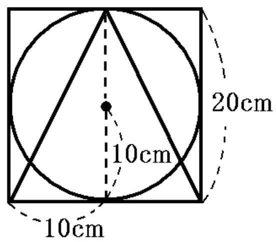
右の図のように，底面の半径が 10cm，高さが 20cm の円柱と，その円柱にちょうどはいる大きさの球と円錐がある。円柱，球，円錐の体積の比をもっとも簡単な整数の比で表せ。



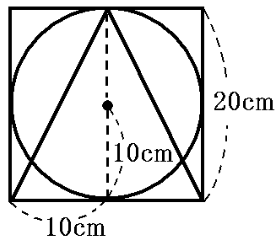
[解答欄]

円柱：球：円錐＝

[ヒント]
この立体を横から見ると，次の図のようになる。

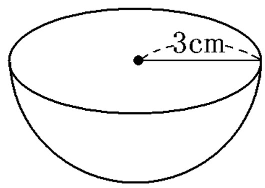


[解答]円柱：球：円錐＝3：2：1
[解説]
右図は，この立体を横から見たものである。



円柱と円錐の底面の円の半径は 10cm，高さは 20cm なので，
(円柱の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$\pi\times10^2\times20=2000\pi$(cm^3)
(円錐の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}\times\pi\times10^2\times20$
$=\dfrac{2000}{3}\pi$(cm^3)
(球の体積)＝$\dfrac{4}{3}\times\pi\times$(半径)$^3=\dfrac{4}{3}\pi\times10^3=\dfrac{4000}{3}\pi$(cm^3)
よって，体積比は，
円柱：球：円錐＝$2000\pi:\dfrac{4000}{3}\pi:\dfrac{2000}{3}\pi=6000:4000:2000=3:2:1$

[球の半分・回転体]
[問題](3 学期)
右図は，半径が 3cm の球を，中心を通る平面で切ってできた立体を表している。次の各問いに答えよ。



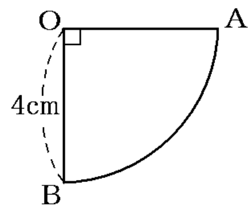
(1) この立体の体積を求めよ。
(2) この立体の表面積を求めよ。
[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 18π cm^3　(2) 27π cm^2
[解説]
(1) 半径が 3cm の球の体積は，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi$(cm^3)であるので，
図の半球の体積は，$36\pi\div2=18\pi$(cm^3)である。

(2) 半径が 3cm の球の表面積は，$S=4\pi r^2=4\pi\times3^2$＝36π(cm²)であるので，
図の半球の曲面部分の面積は，36π÷2＝18π(cm²)である。
半球の平面部分は半径 3cm の円なので，
その面積は，π×3²＝9π(cm²)である。
したがって，この立体の表面積は，18π＋9π＝27π(cm²)である。

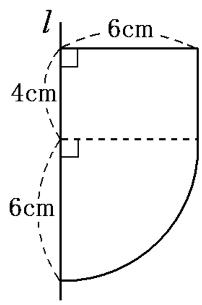
[問題](3 学期)
右図のような中心角が 90°のおうぎ形を，線分 OB を回転の軸として回転させたときにできる立体の表面積を求めよ。



[解答欄]

[解答]48πcm²
[解説]
図のような図形を，線分 OB を回転の軸として回転させたときにできる立体は，半径が 4cm の球の半分である。
半径が 4cm の球の表面積は，$S=4\pi r^2=4\pi\times4^2$＝64π(cm²)であるので，
半球の曲面部分の面積は，64π÷2＝32π(cm²)である。
半球の平面部分は半径 4cm の円なので，
その面積は，π×4²＝16π(cm²)である。
したがって，この立体の表面積は，32π＋16π＝48π(cm²)である。

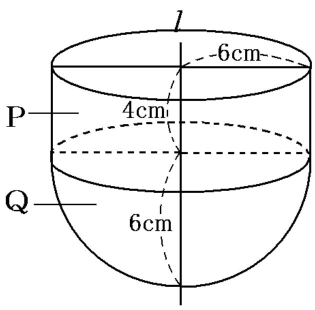
[問題](1 学期中間)
右図のおうぎ形と長方形を合わせた図形を，直線 l を軸として 1 回転させてできる立体について，次の各問いに答えよ。
(1) 体積を求めよ。
(2) 表面積を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)

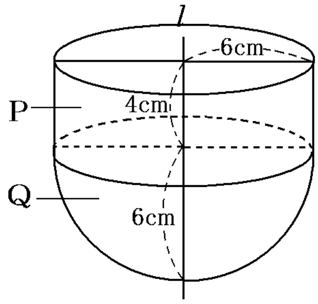
[ヒント]



[解答](1) 288π cm^3　(2) 156π cm^2

[解説]

右図のように，この回転体をPとQの部分に分けて考える。



(1) Pは底面の半径が6cm，高さが4cmの円柱なので，

(Pの体積)＝(底面積)×(高さ)＝$\pi \times 6^2 \times 4 = 144\pi$ (cm^3)

Qは半径6cmの球の半分であるので，

(Qの体積)＝$\dfrac{4}{3} \times \pi \times$(半径)$^3 \div 2 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 6^3 \div 2 = 144\pi$ (cm^3)

したがって，この回転体の体積は，$144\pi + 144\pi = 288\pi$ (cm^3)

(2) (Pの側面積)＝(円周)×(高さ)＝$(2\pi \times 6) \times 4 = 48\pi$ (cm^2)

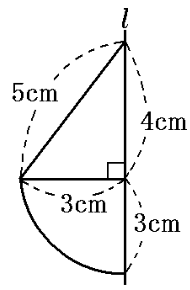
(Pの底面積)＝$\pi \times 6^2 = 36\pi$ (cm^2)

また，Qの部分の面積は半径6cmの球の半分であるので，$4\pi \times 6^2 \div 2 = 72\pi$ (cm^2)

したがって，この回転体の表面積は，$48\pi + 36\pi + 72\pi = 156\pi$ (cm^2) となる。

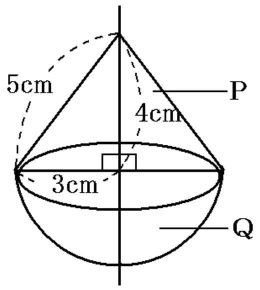
[問題](後期期末)

右の図形を，直線lを軸として1回転させた回転体の体積を求めよ。



[解答欄]

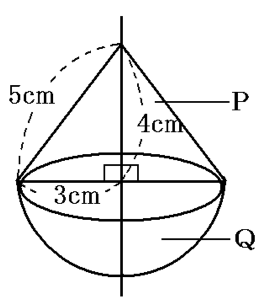
[ヒント]



[解答]30π cm^3

[解説]

右図のように，この回転体をPとQの部分に分けて考える。



Pは底面の円の半径が3cm，高さが4cmの円錐なので，

(Pの体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$ (cm^3)

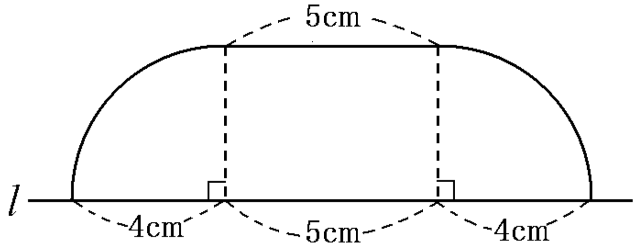
Qは半径3cmの球の半分であるので，

(Qの体積)＝$\dfrac{4}{3} \times \pi \times$(半径)$^3 \div 2 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 3^3 \div 2 = 18\pi$ (cm^3)

したがって，この回転体の体積は，$12\pi + 18\pi = 30\pi$ (cm^3)

[問題](3 学期)

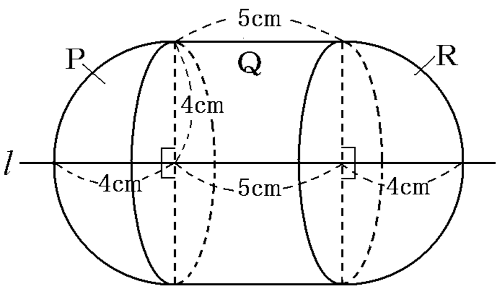
次の図を，直線 l を回転の軸として 1 回転させてできる立体の①体積と，②表面積を求めよ。ただし，円周率は π とする。



[解答欄]

①	②

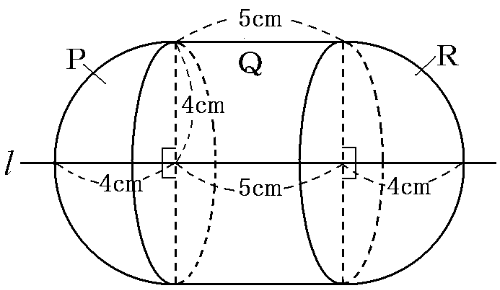
[ヒント]



[解答]① $\dfrac{496}{3}\pi$ cm^3　② 104π cm^2

[解説]

① 直線 l を回転の軸として1回転させてできる立体は右の図のようになる。図の P と R を合わせると，半径が 4cm の球になる。したがって，



(P と R の体積の合計)$=\dfrac{4}{3}\times\pi\times4^3=\dfrac{256}{3}\pi$ (cm^3)

Q は底面の半径が 4cm で高さが 5cm の円柱なので，

(Q の体積)＝(底面積)×(高さ)＝$(\pi\times4^2)\times5=80\pi$ (cm^3)

よって，(P と R の体積の合計)＋(Q の体積)$=\dfrac{256}{3}\pi+80\pi=\dfrac{256}{3}\pi+\dfrac{240}{3}\pi=\dfrac{496}{3}\pi$ (cm^3)

② 求める表面積は，P と R を合わせた球の表面積と，円柱 Q の側面積の和になる。

(P と R を合わせた球の表面積)$=4\times\pi\times4^2=64\pi$ (cm^2)

円柱 Q の展開図の側面の部分は，縦が 5cm，横(＝円周の長さ)が $2\times\pi\times4=8\pi$ (cm)の長方形なので，(円柱 Q の側面積)$=5\times8\pi=40\pi$ (cm^2)

したがって，(P と R を合わせた球の表面積)＋(円柱 Q の側面積)$=64\pi+40\pi=104\pi$ (cm^2)